

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství

Výpočtové modely lineární lomové mechaniky heterogenních materiálů

Závěrečná zpráva projektu FRVŠ 2421/2007/G1

Řešitel: Ing. Oldřich Ševeček
Spoluřešitel 1: Prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.
Spoluřešitel 2: Ing. Jan Bořkovec
Pracoviště: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Datum: Prosinec 2007

Obsah

1	POVINNÉ ČÁSTI ZPRÁVY O ŘEŠENÍ PROJEKTU.....	4
1.1	CÍLE ŘEŠENÍ	4
1.2	POSTUP A ZPŮSOB ŘEŠENÍ.....	4
1.3	ZMĚNY V PROJEKTU	6
1.4	VYUŽITÍ FINANČNÍCH PROSTŘEDKŮ	6
1.5	VÝSLEDKY A VÝSTUPY ŘEŠENÍ.....	7
2	ÚVOD A MOTIVACE	8
3	ZÁKLADNÍ POJMY.....	9
4	FORMULACE PROBLÉMU	12
5	REŠERŠNÍ STUDIE Z OBLASTI ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY	13
5.1	POPIS POLE NAPĚTÍ V OKOLÍ OBECNÉHO KONCENTRÁTORU NAPĚTÍ	13
5.1.1	<i>Analýza singularity.....</i>	<i>13</i>
5.1.2	<i>Přehled odkazů zaměřených na výpočet GSIF</i>	<i>16</i>
5.1.3	<i>Popis nesingulárního pole napětí.....</i>	<i>17</i>
5.2	PROBLÉM PŘEMOSTĚNÍ TRHLINY	19
5.2.1	<i>Zobecněný mostící součinitel intenzity napětí</i>	<i>19</i>
5.2.2	<i>Mostící modely.....</i>	<i>20</i>
5.3	PROBLÉMY LOMOVÝCH KRITÉRIÍ.....	22
5.3.1	<i>Analýza pomocí sdružených asymptotických rozvoju</i>	<i>23</i>
5.3.2	<i>Měření lomové houževnatosti rozhraní</i>	<i>24</i>
6	ŘEŠENÍ KONKRÉTNÍCH ÚLOH.....	25
6.1	POPIS POLE NAPĚTÍ V OKOLÍ OBECNÉHO KONCENTRÁTORU A VÝPOČET GSIF	25
6.1.1	<i>Singulární řešení problému polonekonečné trhliny kolmé na rozhraní dvou ortotropních materiálů pomocí explicitní L.E.S metody.....</i>	<i>25</i>
6.1.2	<i>Výpočet Zobecněného součinitele intenzity napětí</i>	<i>28</i>
6.1.3	<i>Numerické výsledky</i>	<i>29</i>
6.2	PROBLÉM PŘEMOSTĚNÍ TRHLINY	31
6.2.1	<i>Rekurentní vztahy pro výpočet otevření přemostěné trhliny a mostícího napětí</i>	<i>31</i>
6.2.2	<i>Nalezení mostící váhové funkce.....</i>	<i>32</i>
6.2.3	<i>Výpočet mostícího faktoru intenzity napětí.....</i>	<i>33</i>
6.2.4	<i>Numerické výsledky</i>	<i>33</i>
6.3	KRITÉRIA ŠÍŘENÍ TRHLINY KONČÍCÍ NA ROZHRANÍ DVOU MATERIÁLŮ.....	36
6.3.1	<i>Lomová kritéria pro posouzení směru šíření lomu.....</i>	<i>36</i>

6.3.2	<i>Asymptotická analýza</i>	36
6.3.3	<i>Určení H a K_1</i>	38
6.3.4	<i>Numerické výsledky</i>	39
7	EXPERIMENT	41
8	ZÁVĚREČNÉ ZHODNOCENÍ PROJEKTU	44
	PUBLIKACE SOUVISEJÍCÍ S ŘEŠENÍM GRANTOVÉHO PROJEKTU	45
	LITERATURA	46

1 Povinné části zprávy o řešení projektu

Tato zpráva je zpracována jako závěrečná zpráva o řešení projektu FRVŠ 2421/2007/G1

1.1 Cíle řešení

Cílem řešení předkládaného projektu je příprava výpočtových MKP modelů pro výpočet lomově mechanických parametrů trhlin v anisotropních materiálech při obecné poloze trhliny a materiálového rozhraní. Zejména půjde o stanovení exponentu singularity daného obecného koncentrátoru napětí a následného určení zobecněného součinitele intenzity napětí metodou dvoustavových integrálů. Problémy budou řešeny v rámci rovinné anisotropní pružnosti. Vypracované metody se budou aplikovat na problémy přemostěné trhliny v okolí bimateriálového rozhraní, přičemž její vrchol může ležet na tomto rozhraní, dále trhliny nacházející se v okolí anisotropního V-vrubu a trhliny v substrátu v blízkosti ochranné vrstvy. Vyřešení těchto problémů má velký význam pro lomově mechanickou analýzu vrstevnatých kompozitů tvořených anisotropními lamelami a pro analýzu ochranných vrstev. Další cíle budou postupně stanovovány, případně upřesňovány na základě průběžně získávaných výsledků.

Všechny vytvořené materiály budou zpracovány do podoby studijních podkladů a komentovaných metodických listů pro úlohy do cvičení předmětu Vybrané matematické metody v mechanice, který je součástí akreditovaného magisterského studijního oboru M3905-Aplikovaná mechanika. Podklady budou připraveny způsobem, který umožní jejich snadnou modifikaci a využití i pro modelování dalších konfigurací trhlin a materiálových rozhraní. Stanou se tak východiskem pro budoucí semestrální a diplomové projektů a budou tvořit základ znalostní databáze pro posluchače, zaměřené do oblasti počítačového modelování porušování progresivních materiálů.

1.2 Postup a způsob řešení

Řešení navrhovaného projektu bude probíhat v níže popsaných základních etapách, které se mohou i částečně překrývat:

1) První krok analýzy se týká vypracování numerické procedury pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů ve Williamsově asymptotickém rozvoji pro případ trhliny končící na rozhraní dvou obecně anisotropních materiálů (z praktických důvodů zvoleny materiály ortotropní). Na základě této procedury, zpracované v matematickém softwaru MAPLE 10.0, se nalezne exponent singularity napětí charakterizující danou singularitu. Problém je řešen v rámci rovinné pružnosti anisotropních prostředí, kde lze využít tzv. Lechnického-Strohův formalismus založený na pracích [13], [43] a [73]. Základem je popis napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů, které formálně splňují podmínky rovnováhy, kompatibility a lineární závislosti mezi deformací a napětím a podle typu úlohy také dané okrajové podmínky. V případě obecné rovinné anisotropní pružnosti je nutné uvažovat všechny složky tenzoru napětí a deformace. K zjednodušení může dojít v případě, když matice tuhosti příp. poddajnosti vykazuje roviny symetrie, jak je tomu např. u ortotropních materiálů. Obecně úloha vede na řešení homogenní soustavy rovnic, přičemž exponent singularity se určuje z podmínky nulového determinantu matice soustavy. Vzhledem k tomu, že dvoustavové integrály (použité následně k výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí) vyžadují nalezení tzv. pomocného řešení, je stanoven exponent singularity a vlastní vektory i pro toto pomocné řešení. Zdrojový kód v softwaru MAPLE umožňuje libovolnou volbu materiálů na obou stranách rozhraní a tedy možnost provádět parametrické studie závislosti exponentu singularity na použitých materiálech.

2) Druhý krok analýzy se týká výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí - GSIF, pro který byla zvolena metoda dvoustavového ψ -integrálu –viz kapitola 6.1.2, který ve spojení s deformační variantou MKP poskytuje pro jeho výpočet velmi účinný nástroj. Metoda umožňuje stanovit parametry lokálního pole napětí u vrcholu trhliny z napětově-deformačního pole ve vzdálených bodech, kde jsou numerické hodnoty přesnější. Hodnotu dvoustavového integrálu lze vyjádřit v uzavřeném tvaru z lokálního napětově-deformačního pole a pomocného řešení. V softwaru ANSYS jsou zpracovány vstupní soubory formou makra pro tvorbu sítě vzorku s trhlinou libovolně orientovanou k bi-materiálovému rozhraní a následný výpis vypočtených dat do textového souboru. Výstupem jsou pole napětí a posuvů na zvolené vzdálené cestě a tato data jsou dále zpracována formou makra v softwaru MATLAB. Vstupní příkazové soubory jsou vytvořeny tak, aby umožnily i méně zasvěcenému uživateli poměrně snadnou modifikaci a vytvoření vlastní varianty problému, který pak bude moci sám řešit a analyzovat.

3) Ve třetím kroku, který může být volitelný a závislý na konkrétní řešené materiálové konfiguraci, je počítán vliv přítomnosti mosticích vláken (u trhliny přemostěné vlákny a končící na rozhraní) na výsledné pole napětí v okolí jejího kořene. Tato problematika se může potom aplikovat u dlouhovláknových kompozitů. Vliv mosticích vláken na výsledné pole napětí se bude kvantifikovat pomocí tzv. zobecněného mosticího součinitele intenzity napětí o který se sníží aplikovaný zobecněný součinitel intenzity napětí charakterizující pole v okolí nepřemostěné trhliny (viz bod 2)). Opět bude využito MKP výpočtů na zvoleném vzorku a následné zpracování těchto dat v matematickém softwaru MATLAB. Využita bude teorie váhových funkcí a aplikace různých modelů přemostění.

4) Čtvrtým krokem je definice vhodných lomových kritérií, tj. nástroje, který nám umožní na základě zvolené materiálové konfigurace a zatížení posoudit zda a jak se bude trhlina šířit dále – zda nastane ohyb trhliny podél rozhraní nebo penetrace do dalšího materiálu přes rozhraní. K tomuto účelu bude využita teorie tzv. Finite fracture mechanics a teorie sdružených asymptotických rozvoje – viz dále.

5) Pátý krok řešení bude souviset s experimentálním ověřením lomového chování pro vybrané konfigurace materiálových rozhraní a trhliny, přičemž budou využita některá stávající lomová kritéria. Především se bude jednat o otázky spojené s možným ohybem trhliny podél materiálového rozhraní.

Experimentální měření budou uskutečněna ve spolupráci s Ústavem fyziky materiálů AVČR Brno. Nákup vzorků se z důvodu problémů s dodávkou od jejich výrobce značně opozdil, proto nebylo možné provést experimentální ověření do konce roku 2007, tj. v rámci období řešení tohoto projektu. Vyhrazená část finančních prostředků na úhradu části vzorků byla však již užita jako záloha na jejich pořízení prováděné odborným pracovištěm na Ústavu fyziky materiálů AVČR Brno. Experiment se tedy plánuje až na rok 2008, kde potom výsledky budou k současným poznatkům dodatečně doplněny. Je nutné však ještě dodat, že se ukázalo, že tato problematika, a zejména experimentální ověřování získaných poznatků z oblasti pokročilých heterogenních materiálů není vůbec jednoduchou záležitostí. Jedná se o velmi (jak časově, tak finančně) nákladnou záležitost, kterou není možné v rámci jednorozhodného projektu uspokojivě vyřešit a tudíž nelze čekat ve výstupu žádné významné výsledky. Bez statistického zpracování naměřených dat, ke kterému je nutné mít větší počet vzorků nelze výsledkům z několika málo měření plně důvěřovat a brát je jako reprezentativní. Lze je považovat pouze za první náhled na problém, jehož řešení bude nutné dále rozvíjet v rámci dalších větších projektů.

1.3 Změny v projektu

V rámci řešení projektu bylo provedeno několik změn, které byly schváleny prorektorem:

1) Změna zahraniční konference:

Byla provedena změna plánované zahraniční konference na níž bylo čerpáno zahraniční cestovné. Oproti plánované konferenci uvedené v přihlášce projektu byla provedena změna na konferenci International Symposium on Defect and Material Mechanics, March 25-29, 2007 - Aussois, France. Tato konference se jevila jako vhodnější a to i z důvodu, že prezentované výsledky budou publikovány v impaktovaném časopise.

2) Přesun finančních prostředků

Byl proveden přesun finančních prostředků z oblasti Ostatní osobní náklady ve výši 3000,- Kč do kategorie Odměny za řešení projektu, jelikož byla tato částka potřeba k vyplacení pracovníkovi VUT FSI ÚMTMB – Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D., který se rovněž podílel na řešení grantového projektu.

3) Přesun finančních prostředků

Z důvodu nedočerpání položky zahraniční cestovné, kde bylo původně naplánováno 20 000,- Kč a skutečně vyčerpáno pouze 19 311,-, bylo požádáno o převedení nedočerpaného rozdílu 689,- Kč (již nebylo možné jej vyčerpat na zahraniční cestu) do kategorie Ostatní běžné náklady.

1.4 Využití finančních prostředků

Finanční prostředky byly použity v souladu s přihláškou projektu se změnami uvedenými výše:

Tabulka 1. Náklady na řešení projektu

Náklady na řešení (zaokrouhlena na tis.)	Stipendium MŠMT		Příspěvek VŠ	
	Poskytnuto	Použito	Přislíbeno	Skutečnost
Odměna spoluřešiteli *)	4	7	0	0
Stipendia pro řešitele	20	20	0	0
Ostatní osobní náklady *)	3	0	0	0
Služby	0	0	0	0
Cestovné zahraniční *)	20	19	0	0
Ostatní *)	47	48	0	0
Celkem	94	94	0	0

*) všechny změny (přesuny finančních prostředků) byly schváleny prorektorem - viz kap. 1.3.

1.5 Výsledky a výstupy řešení

Všechny vytvořené materiály jsou zpracovány do podoby studijních podkladů a komentovaných metodických listů pro úlohy do cvičení předmětu Vybrané matematické metody v mechanice, který je součástí akreditovaného magisterského studijního oboru M3905-Aplikovaná mechanika. Dále se předpokládá, že získané výstupy budou rovněž využity při tvorbě nového předmětu Výpočetní metody v mechanice kompozitů – opět pro výše uvedený obor. Podklady jsou připraveny způsobem, jenž umožňuje snadnou modifikaci použitého, obecně anisotropního materiálu a změnu případné konfigurace trhliny a materiálového rozhraní. Komentované metodické listy mohou sloužit jako návody k vypracování různých modifikací úloh zadaných vyučujícím. V rámci závěrečné zprávy byla provedena rozsáhlá rešeršní studie zaměřená hlavně na metody vhodné pro řešení problémů lomové mechaniky heterogenních materiálů. Zde se předpokládá, že se tato teoretická část stane základem pro zpracování budoucích semestrálních a diplomových projektů a budou tvořit základ znalostní databáze pro posluchače, zaměřené do oblasti počítačového modelování porušování progresivních materiálů. Zejména se jedná o obor M3905-Aplikovaná mechanika a obor doktorského studia D2312 Inženýrská mechanika se zaměřením na lomovou mechaniku.

Na internetových stránkách Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky - <http://www.umt.fme.vutbr.cz/> v sekci „*Studijní opory*“ a dále „*Výpočtové modely lomové mechaniky heterogenních materiálů*“ jsou volně ke stažení všechny výstupy tohoto projektu:

- Rešeršní studie a popis metodiky řešení ve formě této závěrečné zprávy
- Návody pro použití získaných poznatků a využití vstupních souborů ve formě čtyř komentovaných metodických listů
- Vstupní soubory ve formě maker pro programy ANSYS, MATLAB a MAPLE

Veškeré výsledky byly rovněž prezentovány na následujících konferencích:

- Aplikovaná mechanika 2007, Malenovice, 16.-19. dubna 2007, publikace ve sborníku konference.
- Inženýrská mechanika 2007, Svratka, 14.-17. května 2007, publikace ve sborníku konference.
- International Symposium on Defect and Material Mechanics 2007, 25.-29. března 2007, Aussois, France, příspěvek bude publikován ve speciálním čísle časopisu International Journal of Fracture.
- Víceúrovňový design pokrokových materiálů 2007, 29.-30.2007, Ostrava, VŠB TU, publikace ve sborníku konference.

Detailnější informace o příspěvcích z těchto konferencí jsou uvedeny v závěru této zprávy.

2 Úvod a motivace

Rostoucí používání vláknových kompozitů (či dalších moderních materiálů) ve vysokopevnostních strukturách, přináší nový problém při analýze trhlin v anisotropních a navíc heterogenních prostředích. Bez existence nástroje pro posouzení lomově-mechanického chování těchto materiálů, nelze totiž potom tyto materiály použít v kritických strojních uzlech, kde by nečekané porušení mohlo mít katastrofické následky. Vyvstává proto potřeba umět správně posoudit singulární body v konstrukcích (potenciální koncentrátory napětí) a predikovat jejich následné chování v průběhu zatěžování. Většina dosud publikovaných prací byla zaměřena na popis obecných koncentrátorů v isotropních prostředích. Tato oblast byla tedy již poměrně dobře prozkoumána. Avšak v případě anisotropních materiálů nastávají jisté komplikace, které obecně znemožňují použití a aplikaci stejných postupů a nástrojů jako pro isotropní materiály. Je proto nezbytné najít další možné způsoby, jak zahrnout obecnou anisotropii do řešení a posuzování obecných koncentrátorů napětí.

Většina matic u pokročilých materiálů je křehká. Mají sklon k praskání již při velmi nízkých hodnotách aplikovaného zatížení a porušení se nejčastěji vyskytuje ve formě sítě mikrotrhlin. Orientace těchto trhlin se může měnit v závislosti na relativní orientaci zpevňující fáze k aplikovanému zatížení. Napětí v okolí trhliny je řízené celkovou odezvou anisotropního materiálu. Existence materiálového rozhraní v kompozitech – speciálně v laminátech, přináší další problém při analýze trhlin - problém trhlin končících na rozhraní dvou anisotropních (nejčastěji v praxi ortotropních) materiálů a problém trhlin ležících na rozhraní [15]. Tyto problémy je rovněž možné nalézt u technologie povrchových ochranných vrstev. Pro posouzení chování trhlin ve zmíněných situacích je nezbytné důkladně vyšetřit a popsat napěťové pole v okolí kořene trhliny. Ačkoliv tradiční MKP analýza vzorku je schopna postihnout singulární napěťové chování v blízkosti kořene nebo vrubu v homogenním materiálu (bez rozhraní) - například zjemněním sítě, tento přístup při uvážení přítomnosti nehomogenity (rozhraní), selhává. Velmi slibný přístup jak přesně popsat singulární pole napětí u nehomogenních případů je založen na aplikaci tzv. dvoustavového, dráhově nezávislého integrálu - [25], [31], [68], [89], o kterém bude detailnější zmínka později. Tento dvoustavový integrál je například ve spojení s klasickou formulací MKP velmi efektivním nástrojem pro výpočet intenzity napětí či T-napětí v blízkosti koncentrátoru, aniž bychom byli nuceni použít velmi jemnou síť v okolí singulárního bodu.

Uvedená problematika může být dále ještě komplikována například přítomností zpevňující fáze, která může významně ovlivnit výsledné pole napětí v okolí kořene trhliny. Tyto případy lze nalézt velmi často například u laminátů složených z vrstev vyztužených dlouhými vlákny. Přítomnost neporušených mostících vláken pozitivně ovlivňuje lomové chování tělesa (díky uzavíracímu efektu). Z tohoto důvodu by měl být tento fakt rovněž zahrnut v analýze pole napětí, které je základem pro následné posouzení lomově-mechanického chování.

Všechny výše uvedené poznatky lze následně zúročit při hledání vztahu mezi ohybem trhliny podél rozhraní a penetrací trhliny do sousedního materiálu, tj. při definici lomového kritéria. V praxi lze potom využít toto kritérium například pro situaci, kdy je třeba navrhnout konstrukci, vykazující požadované chování – tj. kdy např. požadujeme, aby ohyb trhliny nastal prioritně před penetrací přes rozhraní. Trhlina „ohnutá“ na rozhraní totiž zvýší energii potřebnou k dalšímu šíření hlavní trhliny a její šíření se tak buď zastaví nebo výrazně zpomalí, což je samozřejmě ve většině případů žádoucí.

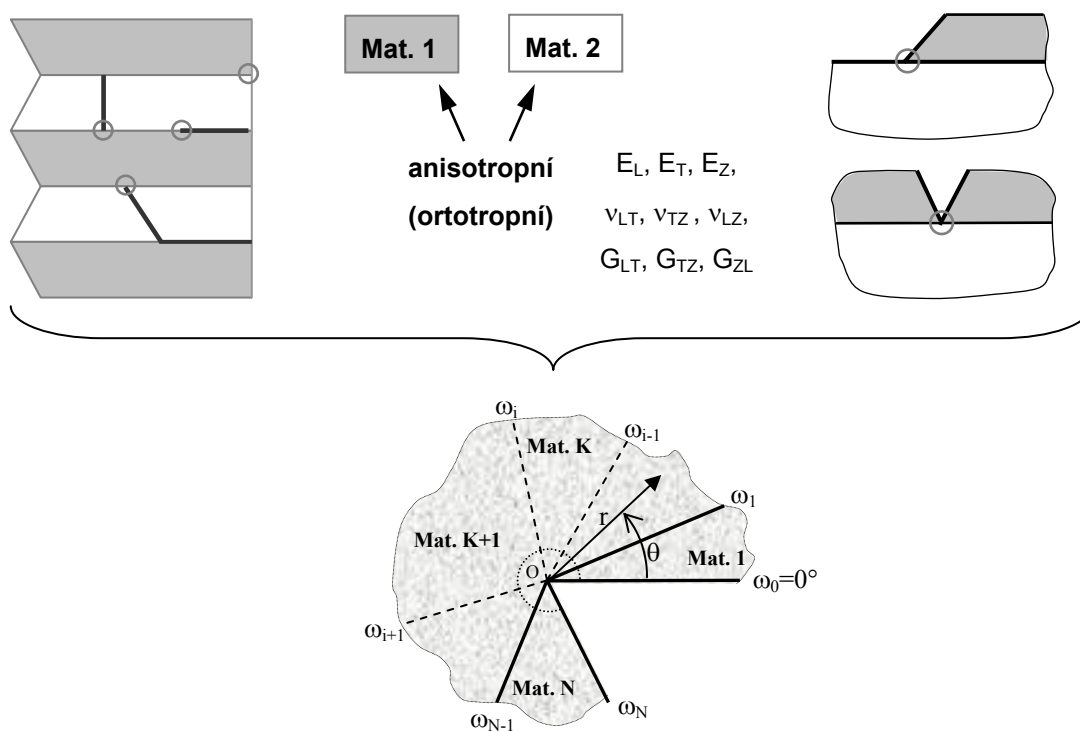
3 Základní pojmy

Obecný koncentrátor napětí

Obecně je singulární pole napětí v okolí singulárního bodu možno zapsat ve tvaru $\sigma_{ij} \approx r^{\delta-1}$, kde δ je tzv. charakteristické vlastní číslo singularity a $1-\delta$ je potom exponent singularity napětí. V případě ostré trhliny v homogenním materiálu, je tento exponent singularity roven 0.5. Jestliže se tento exponent liší od této hodnoty, pak je napět'ový koncentrátor nazýván obecným. V tomto případě může být vlastní číslo (resp. exponent singularity) libovolné číslo z intervalu (0,1). Může být obecně i komplexní, kde potom reálná část je z intervalu (0,1).

Příklady geometrických konfigurací dávajících za vznik obecnému koncentrátoru napětí:

- Trhliny a vruby s kořenem na rozhraní dvou různých materiálů (mohou být situovány pod obecným úhlem k rozhraní)
- Trhliny na rozhraní
- V-vrub
- Obecné spojení více materiálů (zahrnuje všechny předchozí případy)



Obr. 1. Různé typy obecných koncentrátorů – trhlina končící na rozhraní dvou různých materiálů, trhlina podél rozhraní, vrub, V-vrub a obecný více-materiálový vrub.

Teorie komplexních potenciálů:

Lechnického formalismus je nejstarším a nejpoužívanějším formalismem v inženýrské praxi použitelný pro popis rovinné deformace anisotropního prostředí - [40], [41], [42] a [43]. Tento formalismus je vlastně zobecněním Muschelishviliho teorie komplexních potenciálů [55] v rovinné isotropní pružnosti, která předpokládá, že napětí jsou závislé pouze na souřadnicích x_1 a x_2 . To znamená, že ve vztazích, vycházejících z Lechnického teorie, se vyskytují složky redukované matice poddajnosti. Opačná situace je v případě Strohova formalismu, který vychází z prací [13] a [73]. Strohův formalismus předpokládá že posuvy u_i ($i=1, 2, 3$) jsou závislé pouze na souřadnicích x_1 a x_2 (osy souřadného systému mají počátek v kořeni trhliny). Díky tomuto předpokladu jsou v příslušných vztazích přítomny místo složek matic poddajnosti složky matice tuhosti. Výhoda Strohova formalismu spočívá v jeho matematické eleganci a síle při řešení 2D anisotropních elastických problémů.

V případě obecné rovinné anisotropní pružnosti je nezbytné uvážit všechny složky tenzoru napětí i deformace. Každý anisotropní materiál může být charakterizován třemi komplexními čísly μ_i ($i=1, 2, 3$) a jejich komplexně sdruženými protějšky. Čísla μ_i jsou vlastní čísla matice 3×3 jejíž elementy závisí na materiálových elastických vlastnostech. Významné zjednodušení lze provést, má-li matice tuhosti (nebo poddajnosti) roviny symetrie (jak je tomu např. u ortotropních materiálů). V takovém případě je počet charakteristických materiálových vlastních čísel redukován na dvě a nenulové složky tenzoru napětí (či deformace) jsou redukovány na pouze σ_{ij} or ε_{ij} , kde $i, j = 1, 2$.

Singulární pole napětí a deformací v okolí kořene trhliny je užitečné vyjádřit jako funkce polární souřadnice r a θ .

$$u_i = H r^\delta g_i(\theta), \quad \sigma_{ij} = H r^{\delta-1} f_{ij}(\theta), \quad (1)$$

kde δ je charakteristické vlastní číslo dané singularit, které obdržíme řešením singulárního problému vlastních čísel. Zobecněný součinitel intenzity napětí H závisí na vnějším zatížení celého tělesa.

Zobecněný faktor intenzity napětí (GSIF):

V rámci lineární-elastické lomové mechaniky, je napětíové pole v okolí obecného koncentrátoru (pro obecný případ zatížení) napětí možné zapsat v následujícím tvaru:

$$\sigma_{ij(iip)} = \frac{H_1}{\sqrt{2\pi}} f_{ij1}(\phi, \alpha, \beta, \delta_1, \theta) \cdot r^{\delta_1-1} + \frac{H_2}{\sqrt{2\pi}} f_{ij2}(\phi, \alpha, \beta, \delta_2, \theta) \cdot r^{\delta_2-1} + \dots + T \delta_{i1} \delta_{j1} + O(r^\delta). \quad (2)$$

Rozvoj (2) se nazývá Williamsův asymptotický rozvoj pro napětí [1]. První dva členy jsou singulární (obecně jich může být více než jeden). Amplituda singulárního členu se nazývá zobecněný součinitel intenzity napětí (Generalized Stress Intensity Factor – GSIF) a označuje se jako H_1 nebo H_2 . Zde, H_1 odpovídá zobecněnému součiniteli silnější singularit a H_2 slabší singularitě (poznamenejme, že H_1 odpovídá součiniteli intenzity napětí K_I pro trhlinu v homogenním tělese, kde se charakteristické vlastní čísla δ_1 a δ_2 rovnají $1/2$). Proměnné r a θ označují polární souřadnice, T je T-napětí a $O(r^\delta)$ jsou členy vyšších řádů, kterou jsou zanedbatelné vzhledem k předchozím pro $r \rightarrow 0$.

T-napětí:

T-napětí je nesingulární člen ve Wiliamsově asymptotickém rozvoji (2) označený jako T . Představuje napět'ovou složku σ_{xx} působící rovnoběžně s líci trhliny. Tento člen není závislý na vzdálenosti od kořene trhliny (na polární souřadnici r). T-napětí je druhým lomově mechanickým parametrem ve dvou-parametrové lomové mechanice, který převážně charakterizuje vliv geometrie tělesa a může být použit pro popis constraint efektu u kořene trhliny. T-napětí může být tahové (kladné) nebo tlakové (záporné). Jeho hodnota se mění s aplikovaným zatížením, geometrií vzorku a je rovněž závislé na okrajových podmínkách. Jelikož může významně ovlivnit lomově mechanické chování napět'ového koncentrátoru, je nezbytné mít k dispozici nějakou vhodnou metodu pro jeho výpočet. Některé z nich jsou zmíněny v kapitole 5.1.3 s příslušnými odkazy na literaturu.

4 Formulace problému

Aby bylo možné popsat lomově-mechanické chování studovaného obecného koncentrátoru, je nejdříve nutné vyšetřit napěťové pole a následně definovat vhodné lomové kritérium. Jmenovitě je nutné provést následující kroky:

- ☞ V prvním kroku je nezbytné získat charakteristické vlastní čísla dané singularity, které jsou v případě obecného koncentrátoru různé od $1/2$. V literatuře je možné nalézt několik přístupů použitelných pro analýzu singularity. V případě isotropních materiálů je možné použít analytické řešení navržené Williamsem a prezentovaného např. v práci [56]. Avšak tento přístup není příliš vhodný pro případ spojení více jako dvou materiálů, především potom obecně anisotropních materiálů. Je to proto, že toto řešení by vedlo na dlouhé analytické výrazy, se kterými by bylo velmi náročné pracovat. Z tohoto důvodu je lepší aplikovat některou ze semi-analytických metod založených na teorii komplexních potenciálů a Strohově formalismu, které daný problém značně zjednoduší.
- ☞ Ve druhém kroku, je třeba určit rozložení pole napětí v okolí obecného koncentrátoru. Tento krok je defakto spojen s prvním krokem. To znamená, že jakmile nalezneme příslušné vlastní čísla dané singularity, lze spočítat (stejnou metodou) i vlastní vektory popisující rozložení napěťového pole v okolí trhliny.
- ☞ Ve třetím kroku, je nutné pro danou konfiguraci určit amplitudu singulárního členu ve Williamsově asymptotickém rozvoji pro napětí (2) (Zobecněný součinitel intenzity napětí - GSIF). Je to důležitý lomově-mechanický parametr, který obsahuje informaci o zatěžovacích podmínkách. K zpřesnění lokálního pole napětí by dále mohlo vést uvážení T-napětí. V mnoha případech totiž může významně ovlivnit výsledné lomově-mechanické chování součástí. Zobecněný faktor intenzity napětí a T-napětí, mohou být vypočítány např. pomocí kombinace MKP a metody dvoustavových integrálů založené na Bettiho recipročním teorému. Pro stejný účel lze použít s úspěchem též techniku spojitě rozložených dislokací.
- ☞ Čtvrtý krok (který je defakto volitelný) závisí na řešené materiálové konfiguraci. Zahrnuje případ, kdy je trhlina přemostěna dlouhými vlákny a cílem a potom kvantifikovat mostící efekt a jeho vliv na aplikovaný GSIF (vypočtený ve třetím kroku). Situace kdy je trhlina přemostěna lze velmi často nalézt například v různých laminátových strukturách složených z několika vrstev obsahující dlouhá vlákna, kde případná trhlina v některé z vrstev může být těmito vlákny přemostěna. Existuje-li mostící efekt, potom by měl být vzat do úvahy, jelikož může významně ovlivnit stabilitu trhliny.
- ☞ V posledním kroku je třeba pro příslušný obecný koncentrátor navrhnout vhodné lomové kritérium. Jako nejvýhodnější se jeví použití kritérií založených na energetickém přístupu. Hlavním cílem je navrhnout proceduru, která by umožnila predikovat další rozvoj hlavní trhliny případně chování obecného koncentrátoru. Zejména tedy půjde o možnost ohybu trhliny podél rozhraní (jednoduchý nebo dvojitý) nebo penetraci hlavní trhliny přes rozhraní do dalšího materiálu. Je potom zapotřebí posoudit vztah mezi těmito dvěma případy.

5 Rešeršní studie z oblasti řešené problematiky

S ohledem na řešenou problematiku (jak bylo uvedeno v předchozím oddíle), bude tato kapitola rozdělena do tří hlavních částí, která bude zahrnovat rešeršní studii v oblasti studovaného tématu. Hlavním cílem je poskytnout informace o současném stavu výzkumu a nalézt vhodné techniky pro řešení definovaného problému.

5.1 Popis pole napětí v okolí obecného koncentrátoru napětí

5.1.1 Analýza singularity

V první fázi analýzy pole napětí indukovaného obecným koncentrátorem napětí je nutné nalézt vlastní čísla a vlastní vektory náležející dané singularitě. Tyto vlastní čísla určují exponent singularity napětí – řád singularity napětí ve Williamsově asymptotickém rozvoji (2). Vlastní vektory určují tvar a rozložení pole napětí (viz funkce $g(\theta)$, $f(\theta)$ v (1)). Poznamenejme, že v případě, kdy se vlastní hodnoty mění z reálných na komplexní, mohou se při určité kombinaci elastických konstant a geometrie tělesa vyskytnout vícenásobné vlastní čísla odpovídající stejné vlastní funkci. Pro analýzu singularity jsou k dispozici dvě hlavní kategorie numerických metod – explicitní a implicitní metody - [59]:

a) Explicitní metody

Odvozují explicitní tvar rovnice pro vlastní čísla singulárního problému – kořeny této rovnice jsou vlastní čísla singulárního problému. Analytické řešení bylo navrženo např. Williamsem a Westergaardem a použito v pracích [24] či [56] pro řešení problému trhliny končící na rozhraní v isotropních prostředích. Avšak z praktického hlediska je toto řešení omezeno pouze na isotropní materiály (nebo velmi speciální případy anisotropie) a v současné době pouze na problémy maximálně tri-materiálního vrubu. Jak již bylo zmíněno je to z toho důvodu, že toto řešení vede na dlouhé analytické výrazy se kterými se velmi problematicky pracuje. Pro bimateriálový případ autoři v [11], užitím podobných technik, obdržely explicitní tvar vlastní rovnice pro vlastní čísla. V práci [90] zahrnuje explicitní tvar výrazu pro vlastní rovnice pro tri-materiální řešení případ uni a bi-materiální. Rovnice pro vlastní čísla byla opět odvozena jako determinant matice 2x2. Její kořeny se hledají na dané oblasti komplexní roviny. Jak bylo uvedeno ve výše uvedených pracích, výrazy pro tri-materiálový vrub zabírají 15 stran a pracovat s nimi je ručně téměř nemožné a v případě 4-materiálového je rozsáhlost výrazů taková, že i zpracování pomocí symbolických matematických softwarů je obtížná. Proto je třeba použít jiný přístup založený na semi-analytickém řešení.

- L.E.S. metoda

Metoda je nazvána po Lekhnitském [43], Eshelbym [13] a Strohovi [73], kteří zavedli komplexní potenciály pro anisotropní tělesa. Komplexní potenciály formálně splňují rovnice rovnováhy, kompatibility a zákony pružné deformace, avšak specifický tvar rovnice je dosažen splněním okrajových podmínek. Napětí σ_{ij} , posuvy u_i a výsledná síla T_i podél polopřímky vedoucí z počátku souřadného systému je možné zapsat v následujícím tvaru:

$$\sigma_{ij} = H \cdot r^{\delta-1} \cdot f_{ij}(\theta, \dots), \quad u_i = H \cdot r^{\delta} \cdot g_i(\theta, \dots), \quad -T_i = H \cdot r^{\delta} \cdot F_i(\theta, \dots), \quad (3)$$

kde $f_{ij}(\theta, \dots)$, $g_i(\theta, \dots)$ a $F_i(\theta, \dots)$ jsou funkce polární souřadnice θ , materiálové elastické vlastnosti (dané maticí materiálové tuhosti), dále potom charakteristických vlastních čísel materiálu μ_i (viz kapitola 6.1.1), a hlavně hledaného exponentu singularity napětí (charakteristické vlastní číslo singularity δ). Způsoby jak nalézt komplexní čísla μ_i byly navrženy Lekhnitským [43], Eshelbym et al. [13] a shrnuty v práci Suo [74].

Přepokládáme-li perfektní spojení mezi dvěma sousedními materiály a aplikace příslušné okrajové podmínky (shodné posuvy u_i a výsledná síla T_i podél rozhraní spojených materiálů a nezátžené líce trhliny) dostáváme systém systém $4N$ homogenních lineárních rovnic [12] (N je počet materiálů). Tento systém lze zkráceně zapsat v následujícím tvaru:

$$\mathbf{K}(\delta)\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

kde pro netriviální řešení všechny rovnice musí být lineárně závislé, tj. determinant matice soustavy \mathbf{K} musí být nulový ($\det(\mathbf{K})=0$). Z této podmínky dostáváme nelineární rovnici jejíž kořeny jsou hledanými charakteristickými exponenty singularity δ . Reálná část nejmenšího kořene z intervalu $(0,1)$ definuje exponent singularity (δ_1-1) – viz (2).

- *Metoda přenosových matic:*

Procedura původně navržená Tingem [80], [81], je efektivním nástrojem pro charakteristiku nedegenerovaných anisotropních více-materiálových vrubů. i -tý materiálový klín zabírá výseč $\omega_{i-1} < \theta < \omega_i$, $i = 1, \dots, N$ (viz Obr. 1). Mezi materiály je uvažováno dokonalé spojení. Je uvažována okrajová podmínka pevných nebo volných vnějších líců. Řešení je možno psát ve zkráceném tvaru užitím komplexní proměnné $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 = r(\cos\theta + p_\alpha \sin\theta) = r\zeta_\alpha(\theta)$:

$$\mathbf{w}(r, \theta) = r^\delta \mathbf{XZ}^\delta(\theta) \mathbf{q}, \quad (5)$$

kde $\mathbf{w}^T(r, \theta) = [\mathbf{u}(r, \theta), \Phi(r, \theta)]^T$, \mathbf{u} značí vektor posuvů a Φ je vektor funkce napětí. p_α jsou tři různé komplexní čísla s kladnou imaginární částí, které obdržíme jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det[c_{i1k1} + p(c_{i1k2} + c_{i2k1}) + p^2 c_{i2k2}] = 0. \quad (6)$$

c_{ijkl} je tensor elastických konstant, tj. $\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}$, matice \mathbf{X} a \mathbf{Z} jsou definovány jako

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{L} & \bar{\mathbf{L}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}^\delta = \begin{bmatrix} \langle \zeta_*^\delta \rangle & 0 \\ 0 & \langle \bar{\zeta}_*^\delta \rangle \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kde \mathbf{A} a \mathbf{L} jsou matice dané $L_{i\alpha} = A_{k\alpha}(c_{i2k1} + p_\alpha c_{i2k2})$, $A_{k\alpha}$ značí vlastní vektor odpovídající vlastní hodnotě p_α , pruh značí komplexní sdruženost. $\langle \zeta_*^\delta \rangle = \text{diag}[\zeta_1^\delta, \zeta_2^\delta, \zeta_3^\delta]$. $\delta \in (0,1)$ je charakteristické vlastní číslo singularity, $\mathbf{q}^T = [\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}]^T$ je odpovídající vlastní vektor, který lze určit až na multiplikativní konstantu. Je-li δ reálné číslo, potom $\tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}$. Tingova procedura využívá přenosových matic, které přenáší funkce složek vektoru posuvů a napětí z jedné hrany materiálového vrubu do druhého. Užitím podmínek spojitosti zavedených hypotézou dokonalého spojení mezi vruby, $\mathbf{w}_i(r, \omega_i) = \mathbf{w}_{i+1}(r, \omega_i)$ ($i = 1, \dots, N-1$), a přenosové matice pro každý vrub, lze snadno dopět k výrazu pro celý více-materiálový vrub, který dává do vztahu proměnné mezi jeho vnějšími lící (ω_0 a ω_N):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_N(r, \omega_N) \\ \Phi_N(r, \omega_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_N^{(1)} & \mathbf{K}_N^{(2)} \\ \mathbf{K}_N^{(3)} & \mathbf{K}_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(r, \omega_0) \\ \Phi_1(r, \omega_0) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

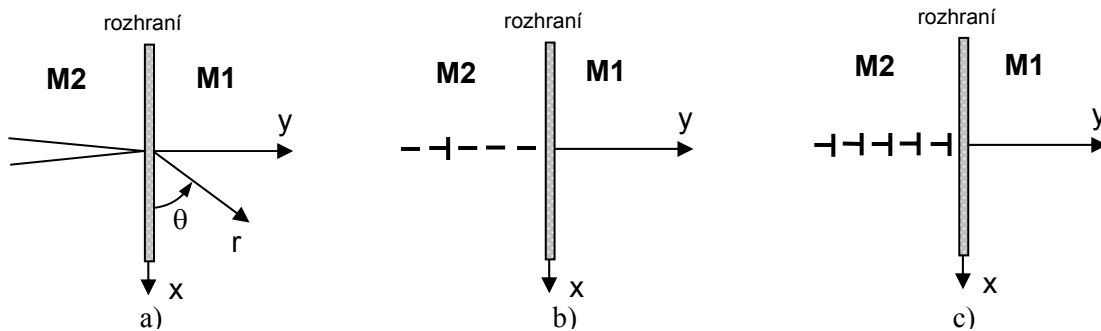
kde \mathbf{K}_N je vypočítán součinem sekvence po sobě jdoucích přenosových matic \mathbf{E}_i všech materiálových úseků:

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{E}_{N-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{XZ}^\delta(\omega_i) [\mathbf{Z}^\delta(\omega_{i-1})]^{-1} \mathbf{X}^{-1} \quad (9)$$

Je dobré poznamenat, že Tingova procedura přímo vede na systém lineárních rovnic o velikosti 3×3 nebo 6×6 , bez ohledu na počet materiálů N , narozdíl od tradiční analytické procedury vedoucí na systém lineárních rovnic o velikosti $(6N \times 6N)$.

- Technika spojitě rozložených dislokací

Tuto techniku lze použít pro modelování libovolných trhlin (otevřených či uzavřených) [19]. Je založena na tzv. Buecknerově principu. Hlavní myšlenkou je použít superpozici napětového pole přítomného v tělese bez trhliny, spolu s neznámou distribucí hranových dislokací zvolenou tak, aby líce trhliny byly bez zatížení. Jinými slovy, trhlina je modelována pomocí spojitě rozložených hranových dislokací podél trhliny s jistou dislokační hustotou, která je na počátku neznámá a musí být určena. Cílem je sestavit integrální rovnici, kde se příslušné fundamentální řešení pro izolovanou dislokaci integruje podél líce trhliny (dislokace jsou rozloženy s jistou dislokační hustotou). Řešením této Fredholmovy integrální rovnice je potom neznámá dislokační hustota. Nalezneme-li tuto hustotu rozložení dislokací, můžeme potom vypočítat libovolnou veličinu (napětí nebo posuvy) v okolí kořene trhliny. Lze rovněž určit GSIF nebo T-napětí.



Obr. 2. Modelování trhliny pomocí CDD techniky: a) trhlina kolmá na bi-materiálové rozhraní; b) Izolovaná dislokace v polo-nekonečné rovině; c) Pole dislokací rozložených podél roviny trhliny s jistou dislokační hustotou.

Na základě práce Suo [74] je možné psát napětové složky pole napětí (σ_{li}) indukované jednou izolovanou dislokací s Burgersovým vektorem b_i umístěným v bodě (x_0, y_0) v nekonečném anisotropním bi-materiálu v následujícím tvaru:

$$\sigma_{li}(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha}'' p_{\alpha}'' \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\beta}} \right) + M_{\alpha k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \zeta_{\alpha}} \right] + C.C., \quad z \in 2 \quad (10)$$

$$\sigma_{li}(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} L_{i\alpha}' p_{\alpha}' \sum_{\beta} \left(C_{\alpha\beta} M_{\beta k}'' \frac{d_k}{z_{\alpha} - \zeta_{\beta}} \right) + C.C., \quad z \in 1 \quad (11)$$

kde indexy I a II značí materiály 1 a 2 a $C.C.$ výraz komplexně sdružený k předchozímu. Matice L a M obsahují informace o bi-materiálových elastických vlastnostech a p_{α} jsou charakteristické materiálové vlastní čísla—viz [74].

Zavedme lokální hustotu Burgersova vektoru f_k v nějaké pozici $(x=0, y)$ a definujme

$$d_k = f_k(y_0) dy_0, \quad (12)$$

kde d_k je elementární Burgersův vektor mezi y_0 a $y_0 + dy_0$. Integrací (10) podél celé trhliny obdržíme integrální rovnici pro napětí indukovaná dislokační hustotou f_k v místě $(0, y)$:

$$\sigma_{li}(y) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{\alpha} L_{i\alpha}'' \left[\sum_{\beta} \left(G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}'' \frac{p_{\alpha}''}{\bar{p}_{\beta}''} \int_{-\infty}^0 \frac{f_k(y_0) dy_0}{\frac{p_{\alpha}''}{\bar{p}_{\beta}''} y - y_0} \right) + M_{\alpha k}'' \int_{-\infty}^0 \frac{f_k(y_0) dy_0}{y - y_0} \right] + C.C. \right\}. \quad (13)$$

Asymptotické pole napětí v okolí kořene trhliny je možné modelovat pomocí (13) s dislokační hustotou f_k :

$$f_k(y_o) = H \cdot v_k (-y_o)^{-\delta}, \quad y_o < 0 \quad (14)$$

kde δ je charakteristické vlastní číslo singularity, které hledáme, v_k jsou složky odpovídajících vlastních vektorů a H je zobecněný součinitel intenzity napětí. Dosazením (14) do (13), integrací a aplikací okrajových podmínek nezátížených líců trhliny obdržíme:

$$\text{Re} \left\{ \left[\sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{i\alpha}'' G_{\alpha\beta} \bar{M}_{\beta k}'' \left(-\frac{\bar{P}_{\beta}''}{P_{\alpha}''} \right)^{-\delta} \csc(\pi\delta) - \delta_{ik} \cot(\pi\delta) \right] \right\} v_k = 0 \Rightarrow \mathbf{D}(\delta) \cdot v_k = 0 \quad (15)$$

Vlastní čísla δ jsou vypočteny z charakteristické rovnice pro vlastní čísla:

$$\det[\mathbf{D}(\delta)] = 0 \quad (16)$$

Potenciály pro interakci hranové dislokace s rozhraním dvou anisotropních materiálů lze obdržet zavedením standartních analytických parametrů spojitosti podél rozhraní jak je popsáno např. v pracích [74] a [75]. Tyto práce popisují vliv přítomnosti dalších singularit (jako např. bimateriálového rozhraní) na řešení pro izolovanou dislokaci v nekonečné homogenní rovině.

b) Implicitní metody

Tyto metody nevedou k uzavřenému tvaru rovnice pro vlastní čísla, jsou pomalejší, avšak mohou být použity rovněž pro anisotropní materiály a více-materiálové vruby. K dispozici je například metoda založená na variační formulaci řešení problematiky [38]. Hlavní myšlenkou je nahradit klasickou formulaci, formulaci variační zkonstruováním funkcionálu ve tvaru tzv. sesquilineární formy [59]. Klasická aproximace pro nalezení minima funkcionálu užitím FEM vede na homogenní systém algebraických rovnic pro vlastní čísla a vlastní vektory. Jinými slovy, problém nekonečných rozměrů je převeden na diskrétní.

5.1.2 Přehled odkazů zaměřených na výpočet GSIF

Další fáze analýzy pole napětí sestává z výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí-GSIF (parametr H ve (2)). Existuje několik přístupů pro jeho výpočet. Jeden z nejjednodušších je založen na porovnání numerických výpočtů pole napětí (nebo posuvů) před kořenem trhliny (např. pomocí MKP) s příslušnými analytickými výrazy pro napětí nebo posuvy. GSIF je potom extrahován pro $r \rightarrow 0$ – viz např. práce [56], [83]. Tento přístup je nazýván také jako “přímá metoda” a může být použit pro případy, kdy je přítomna pouze jedna singularita. Přesnost této metody je silně závislá na velikosti elementů u kořene trhliny. Čím vyšší přesnost je požadována, tím menší elementy musí být použity v okolí kořene. Tato podmínka může proto vést k vysokým výpočetním časům a neekonomičnosti tohoto přístupu. Poznamenejme ještě, že součinitel intenzity napětí pro případ obecného koncentrátoru napětí nelze spočítat pomocí žádné z integrovaných funkcí v komerčním MKP softwaru (tyto techniky jsou navrženy pouze pro trhliny v homogenních prostředích - [2]). Jistý post-processing byl navržen např. v práci [4].

Další, mnohem efektivnější metoda, kterou lze s úspěchem pro výpočet GSIF použít (případně i pro výpočet T-napětí) je založena na metodě dvoustavových (interakčních) integrálů v kombinaci s MKP – např. [12], [30]. Tato metoda umožňuje výpočet parametrů lokálního pole napětí v okolí kořene trhliny použitím deformačního a napěťového pole ve vzdálených bodech, kde jsou numerické výsledky obdržené například z MKP analýzy dostatečně přesné. Dvoustavové integrály, které jsou křivkově nezávislé, jsou založeny na J-

integrálu [15], [23] nebo M-integrálu [16]. Fyzikální význam M-integrálu je interpretován jako rychlost uvolněné energie s ohledem na jednotkovou expansi 2D kavity.

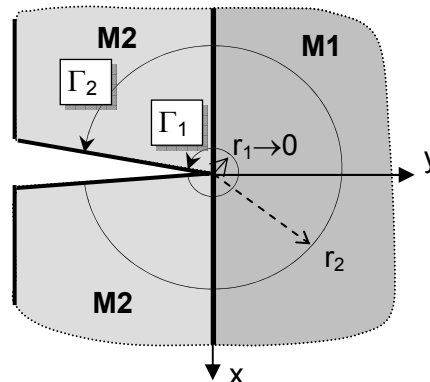
Aplikace dvoustavového integrálu vyžaduje znalost tzv. pomocného řešení ve tvaru vlastních funkcí příslušného singulárního problému [30]. Hodnotu dvoustavového integrálu je možné vyjádřit v uzavřeném tvaru z lokálního pole napětí a deformací a z pomocného řešení.

Pomocné řešení bylo nalezeno na polo-nekonečné nebo konečné trhlině, obecně končící na rozhraní dvou anisotropních materiálů. Ve spojení s popisem V-vrubů nebo dalších obecných koncentrátorů je nezbytné poznamenat, že J-integrál není křivkově nezávislý, takže nemůže aplikován pro výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí v těchto případech. Naopak dvoustavový M-integrál je křivkově nezávislý v případě V-vrubů [16].

GSIF může být rovněž určen pomocí tzv. ψ -integrálu [12]. Tato metoda, která se jeví jako velmi efektivní a je důsledkem Bettiho recipročního teorému. Hlavní výhodou tohoto integrálu spočívá v jeho nezávislosti na integrační cestě rovněž pro více-materiálové vruby v anisotropních prostředích [72]. Reciproční teorém pružné statických stavů říká, že každé dva integrály podél dvou různých integračních cest se musí rovnat, tzn. musí platit následující rovnice:

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} \cdot n_j \cdot u_i^* - \sigma_{ij}^* \cdot n_j \cdot u_i) dS = \int_{\Gamma_2} (\Sigma_{ij} \cdot n_j \cdot u_i^* - \sigma_{ij}^* \cdot n_j \cdot U_i) dS. \quad (17)$$

Zde, Γ_1 je integrační cesta obklopující kořen trhliny s poloměrem $r_1 \rightarrow 0$, Γ_2 je libovolná vzdálená integrační cesta s konečným poloměrem, kde přesnost FE analýzy napěťového a deformačního pole je dostatečně vysoká a n_j je normála směřující z počátku SS (viz Obr. 3).



Obr. 3. Integrační cesty obklopující singulární bod.

σ_{ij} a u_i je singulární pole napětí a posuvů, které je integrováno spolu s pomocným polem σ_{ij}^* , u_i^* na křivce Γ_1 a to samé pomocné řešení je integrováno spolu s polem napětí a deformací získaného z FE analýzy - Σ_{ij} a U_i na křivce Γ_2 . Pomocné řešení je navrženo tak, že integrál podél příslušné dráhy je konečný. Hledaný GSIF je zahrnut v singulárním poli σ_{ij} a u_i a proto jej lze vytknout před integrál a numericky vypočítat. Jak singulární tak pomocné řešení lze obdržet buď nějakou explicitní metodou a FE řešení napětí a deformací užitím nějakého z komerčních MKP softwarů.

5.1.3 Popis nesingulárního pole napětí

Nesingulární člen ve Williamsově asymptotickém rozvoji pro napětí – T-napětí – je často zanedbáván. Je-li však snahou popsat napěťové pole v okolí kořene trhliny co nejpřesněji, měla by mu být věnována stejná pozornost jako zobecněnému součiniteli intenzity napětí. Je dobře známo, že T-napětí spolurozhoduje o velikosti plastické zóny - u kovů, případně velikosti oblasti mikrotrhlin – u křehkých materiálů a keramik. T-napětí má rovněž významný

vliv na počáteční úhly šíření trhliny u křehkého lomu [52]. Obecně, numerický výpočet T-napětí vyžaduje opatrné zacházení, kvůli jejich poloze v okolí singulárních bodů. Uzavřený tvar řešení pro T-napětí v rovinné pružnosti trhlín u homogenních materiálů je možné najít například v práci [27]. Avšak pro případ obecného koncentrátoru napětí může být toto řešení komplikované nebo dokonce nemožné. Existuje mnoho dalších metod pro výpočet T-napětí v případě napěťových koncentrátorů v homogenních materiálech [67], avšak mnoho z nich selhává použijeme-li je na případ obecného koncentrátoru napětí. V těchto případech je zde několik možností a přístupů jak lze T-napětí určit:

Výpočet T-napětí užitím MKP

Odhad T-napětí užitím MKP analýzy je možný s poměrně dobrou přesností pro trhliny v homogenních materiálech. Avšak v případě obecných koncentrátorů se stává tato analýza diskutabilní a to právě díky přítomnosti nespojitosti materiálu na rozhraní. Tento přístup lze tedy použít pouze jako první aproximaci, avšak nikoliv jako přesné řešení. T-napětí je pomocí této metody odhadováno jako napětí ve směru líců trhliny ve vzdálenosti $r \rightarrow 0$ od kořene trhliny. Odhad je silně závislý na zjemnění sítě v okolí kořene trhliny.

Výpočet T-napětí užitím křivkových integrálů

Výpočet T-napětí v anisotropním lineárně elastickém tělese je prezentován v člancích [88] a [76]. T-napětí je zde počítáno užitím křivkově nezávislého integrálu a Bettiho recipročního teorému. Pro určení T-napětí je nutné použít speciální pomocné řešení pole napětí a deformací pro trhlinu zatíženou momentem působícím okolo osy x_3 v kořeni. Použijeme-li Strohův formalismus v anisotropní pružnosti, analytický výraz pro T-napětí se odvodí v kompaktním tvaru, který má překvapivě jednoduchou strukturu založenou na Barnett-Lothe tensoru, L . Prezentovány jsou rovněž tvary tohoto řešení pro případy degenerovaných materiálů, monoklinických, ortotropních a isotropních materiálů. Veškerá publikovaná teorie je však použitelná pouze na případy trhlín v homogenních materiálech. V případě obecného koncentrátoru napětí není aplikace J-integrálu možná, jelikož je pro tyto případy křivkově závislý. Proto je nezbytné použít jiný křivkově nezávislý integrál, jakým je například ψ -integrál, jenž byl definován v předchozí kapitole pro výpočet zobecněného součinitele intensity napětí. Ovšem v tomto případě je nejdříve nezbytné zkonstruovat vhodné pomocné řešení.

Výpočet T-napětí užitím CDD techniky

Broberg ve své práci [6] navrhl k výpočtu T-napětí využití dislokačních polí. Výpočet T-napětí touto metodou vede na Fredholmovu rovnici, kterou lze řešit velmi přesně a poskytuje přesnější hodnoty T-napětí než např. klasická MKP. Aplikace této metody však vyžaduje určení řešení pro dislokaci na poměrně složité oblasti. Takový přístup je neekonomický, ale existují strategie, které lze pro zvládnutí tohoto problému použít. Tato strategie začíná s dislokací v neporušeném nekonečném tělese, kde se určí napětí vzniklá podél nějaké $\partial\Omega$ považovanou za hranici konečného tělesa. Zavedením takového zatížení podél $\partial\Omega$, které negují napětí původně nalezené a řešení napětí podél dislokační roviny (např. užitím MKP), lze odvodit regulární část řešení pro dislokaci v konkrétní konečné oblasti [33].

Modelování konečné trhliny kolmé na bimateriálové rozhraní a končící před rozhraním ve vzdálenosti b , je prezentováno v pracích [26] a [87]. Použita je zde technika spojitě rozložených dislokací. Materiály jsou uvažovány jako isotropní. Druhý zmíněný článek rovněž porovnává výpočet faktoru intensity napětí pro konečný a nekonečný problém.

5.2 Problém přemostění trhliny

Vláknové kompozity na bázi keramik mají slibný potenciál např. pro vysokoteplotní aplikace. Při tahovém zatížení kompozitu ve směru vláken může matrice praskat ve směru kolmém na vlákna, avšak napětí přidružené porušení matrice může být značně vyšší než kritické lomové napětí nevyztužené keramiky. Navíc, s neporušenými vlákny, může kompozitní materiál pokračovat v přenášení zatížení až do okamžiku dokud nedojde k porušení samotných vláken. Ve článku [9] jsou studovány kritické podmínky pro vznik rozšíření praskání matrice v analytickém tvaru dle teorie lomové mechaniky. Uvažovány jsou zde dvě odlišné situace týkající se rozhraní vlákno/matrice: (i) nespojené vlákno vázané v matrici tepelnou nebo jinou deformací avšak dovolující prokluz se třením, a (ii) vlákna, která jsou slabě spojená s matricí, avšak mohou být odděleny napětími blízko kořene rozšiřující se trhliny v matrici. Výsledky zobecňují teorii Avestona-Cooper-Kellyho [3] pro případ (i).

5.2.1 Zobecněný mostící součinitel intensity napětí

Ke kvalitativnímu vyjádření vlivu mostících vláken na výsledné pole napětí, je zapotřebí vypočítat hodnotu tzv. zobecněného mostícího součinitele intensity napětí H_{br} vyvolaného mostícím napětím. V důsledku potom lokální zobecněný faktor intensity napětí H_{tip} působící v blízkém kořeni trhliny je nižší než aplikovaný faktor intensity napětí H_{appl} vypočtený pro nepřemostěný případ ($H_{tip}=H_{appl}-H_{br}$). Jednou z možných cest jak vliv přemostění do řešení zahrnout lze nalézt např. v [34] nebo [54]. Příspěvek [34] se týká teoretické a experimentální analýzy přemostěné trhliny pro případ chevron vzorku (kompozit se skleněnou matricí vyztuženou dlouhými SiC vlákny) s přemostěnou trhlinou zatíženého tří-bodovým ohybem. Lomová houževnatost (K_{IC}) je určena užitím techniky chevron vrubu a porovnána s teoretickými predikcemi založenými na mikromechanické analýze využívající váhové funkce. Zobecněný mostící součinitel intensity napětí je potom vypočítán pomocí následujícího vztahu

$$H_{br} = \int_{-h}^0 W(y, h) \sigma_{br}(y) dy, \quad (18)$$

kde $W(y, h)$ je zmíněná váhová funkce, kterou lze obdržet numericky pomocí FE analýzy jak bylo navrženo například v [66]. Váhová funkce závisí na geometrii součásti, avšak je nezávislá na aplikovaném zatížení. Součinitel intensity napětí v případě chevronového vzorku je zde počítán pro liniové zatížení na lících trhliny. Zatížení je aplikováno v různých pozicích mezi vrcholem Chevron vrubu a kořenem trhliny, z čehož následně vypočítáme celou váhovou funkci. Tato technika může být modifikována pro řešení rovinných problému trhlín užitím dvojicí izolovaných sil místo liniového zatížení.

Mostící napětí σ_{br} lze vypočítat užitím rekurentních vztahů a příslušného mostícího modelu, jak bylo prezentováno například v článku [34]. V práci [14] lze nalézt proceduru, která umožňuje určení mostícího napětí z naměřených R-křivek. Jakmile váhovou funkci vypočítáme, lze potom vypočítat i zobecněný faktor intensity napětí H_{br} (integrací přes přemostěnou délku trhliny h) a tudíž i lokální GSIF H_{tip} . Aplikovaný součinitel intensity napětí H_{appl} lze vypočítat na tělese bez přemostění trhliny např. pomocí techniky dvoustavových integrálů – viz kapitola 5.1.2.

Problém přemostění trhliny může být rovněž řešen efektivně pomocí techniky spojitě rozložených dislokací (CDD). Tato technika vede na Fredholmovu integrální rovnici, kterou lze řešení velmi efektivně za pomoci např. Galerkinovy metody. Pro bimateriálový poloprostor viz Obr. 2, lze řešení nalézt na základě dosavadních poznatků Choi a Earmmeho ve [28], kteří studovali singularity v anisotropních trimateriálech. Integrální rovnici

dostaneme zvolením takového rozložení dislokací, které splňuje podmínky zatížení podél líce trhliny a oblasti přemostění:

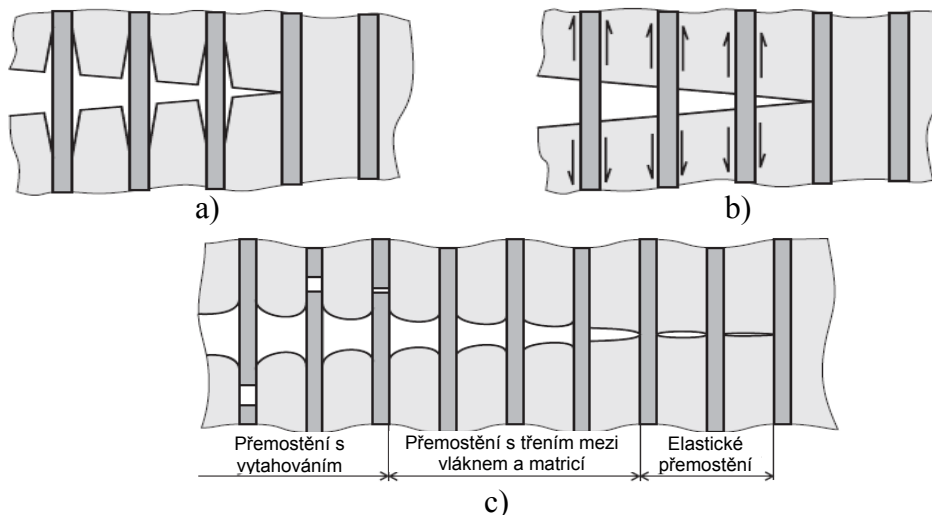
$$\frac{(\text{Im}(\mathbf{A}^H \mathbf{M}^H))_{ik}^{-1}}{2\pi} \int_{-h}^0 \frac{f_k(y_o) dy_o}{y-y_o} + \int_{-h}^0 N_{lik}(y, y_o) f_k(y_o) dy_o = \sigma_{li}^{appl}(y) + \delta_{li} \sigma_{br}(v(y)) \quad (19)$$

Zde, N_{lik} jsou regulární jádra na zvoleném intervalu $[-h,0]$ (podél trhliny), $\sigma_{li}^{appl}(y)$ značí negovaná napětí v $x=0$ produkovaná daným zatížením na hranici, působícím na hranici $\partial\Omega$, avšak na tělese bez trhlín a dislokací. σ_{br} je mostící napětí jako funkce posuvu horního líce trhliny. $f_k(y_o)$ je neznámá dislokační hustota, která musí být nesingulární na otevřeném konci. Integrovaná rovnice může být řešena užitím Gaussovy-Jacobiho kvadratury. Jakmile je dislokační hustota $f_k(y_o)$ nalezena, posuv horního líce trhliny $v(y)$ je rovněž znám a z $\sigma_{br}[v(y)]$, plyne mostící napětí jako funkce pozice na lici trhliny. Po výpočtu mostícího napětí a dislokační hustoty, lze vypočítat i libovolnou složku napětí před čelem trhliny. Následně výsledný lokální zobecněný faktor intenzity napětí obdržíme jako následující limitu:

$$H_{tip} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\delta} \sigma_{11}(r, \theta = \pi/2) \quad (20)$$

5.2.2 Mostící modely

Pro výpočet mostícího napětí nebo uzavíracího efektu u trhliny, musí být definován nejdříve příslušný mostící model. Mostící modely obecně popisují vztah mezi posuvem horního líce trhliny a mostícím napětím. V literatuře je možné nalézt několik různých modelů popisující chování v závislosti na COD. V následujícím obrázku jsou schematicky znázorněny některé možné vazby mezi vláknem a maticí:



Obr. 4. Rozhraní vlákno/matrice: a) dekoheze vlákna a matrice; b) třecí vazba mezi vlákny a maticí; c) charakteristické oblasti přemostění a odpovídající typy vazeb mezi vlákny a maticí.

Model přemostění (Budianského model) uvedený v pracích [3], [7], [9] a [47] uvažuje do jisté vzdálenosti od čela trhliny prokluz mezi vlákny a maticí daný hodnotou smykové resistance prokluzu τ a představuje spojitě rozložené mostících „pružin“, kde platí následující kvadratický vztah mezi mostícím napětím a otevřením trhliny:

$$v(y) = \left(\frac{\sigma_{br}(y)}{\beta} \right)^2, \quad (21)$$

kde $v(y)$ je posuv horního líce trhliny (poloviční hodnota otevření trhliny) jako funkce

souřadnice y (Obr. 4) a součinitel β je definován dle následujícího vztahu:

$$\beta = \left(\frac{4c_f E_f E^2 \tau}{R(1-c_f)^2 E_m^2} \right)^{1/2} \quad (22)$$

E_f a E_m jsou Youngovi moduly pružnosti vláken a matrice, E – Výsledný Youngův modul kompozitu ve směru vláken, c_f – objemový podíl vláken, R – poloměr vláken a τ již zmíněná smyková resistence prokluzu mezi vláknem a matricí. Tento jednoduchý model přemostění předpokládá, že hodnota pevnosti vláken má jednu konkrétní deterministickou hodnotu σ_{of} a přerušení vláken tak nastane, když mostící napětí dosáhne hodnoty $\sigma = c_f \sigma_{of}$. Díky prokluzu mezi matricí a vláknem se napětí ve vlákně rozloží lineárně od střední roviny trhliny, kde bude jeho hodnota maximální. Předpoklad jedné konstantní hodnoty pevnosti vláken tak nutně vede k závěru, že se vlákna musí porušit v této střední rovině. Následná predikce houževnatosti kompozitu, tak může být zbytečně na konzervativní straně, tj., že ve skutečnosti by k porušení vláken došlo až při mnohem větším napětí. Důvodem je rozptyl v tahové pevnosti vláken, který může s větší pravděpodobností zapříčinit prasknutí vláken uvnitř matrice než na lících trhliny, a vede tak k vytahování vláken se třecí vazbou vlákno/matrice a ke konečnému přerušení účinnosti daného vlákna tak dojde až po jeho úplném vytažení z matrice. Tyto skutečnosti vedou následně k vyšší pevnosti daného kompozitu. Je zřejmé že vlákna přetržená uvnitř matrice stále přispívají k mosticímu napětí až do doby než jsou z matrice úplně vytažena. Relativní příspěvek samotných vláken, která působí jako elastická vazba mezi líci trhliny a těch co jsou přetrženy uvnitř matrice a eventuálně vytahovány ven je analyzován za předpokladu, že pevnost vláken sleduje statistické Weibullovo rozdělení - viz [79]. Za tohoto předpokladu dostaneme explicitní vyjádření průměrného napětí přenášeného vlákny podél trhliny:

$$\hat{\sigma}_{br} = \underbrace{\sigma_{br} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{br}}{c_f \Sigma} \right)^{m+1} \right]}_{\text{podíl neporušených vláken}} + \underbrace{\sigma_p \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{br}}{c_f \Sigma} \right)^{m+1} \right] \right\}}_{\text{podíl přetržených vláken}}; \quad \text{kde } \sigma_{br}(y) = \beta \sqrt{v(y)}, \quad (23)$$

kde σ_p je průměrné napětí využitě porušenými vlákny vytahovanými z matrice. Rozdělení pevnost vláken je zavedeno pomocí parametru $\Sigma = (m+1)^{1/(m+1)} \sigma_{of}$, který zahrnuje informace o mechanických (tahových) vlastnostech vlákna daných Weibullovým modulem m a charakteristickou pevností vlákna σ_{of} . Napětí přenášené porušenými vlákny vytahovanými z matrice lze vyjádřit takto:

$$\sigma_p = \frac{2c_f \tau}{R} \left(\langle h \rangle - \frac{\delta}{2} \right), \quad (24)$$

kde $\langle h \rangle$ je průměrná vzdálenost od místa porušení vlákna k rovině trhliny - viz Thouless & Evans [79]:

$$\langle h \rangle = \frac{R}{2\tau} \frac{\Sigma}{m+1} \Gamma \left(\frac{m+2}{m+1} \right) = \frac{l_c}{2} \frac{1}{(m+1)^{m/(m+1)}} \Gamma \left(\frac{m+2}{m+1} \right) \quad (25)$$

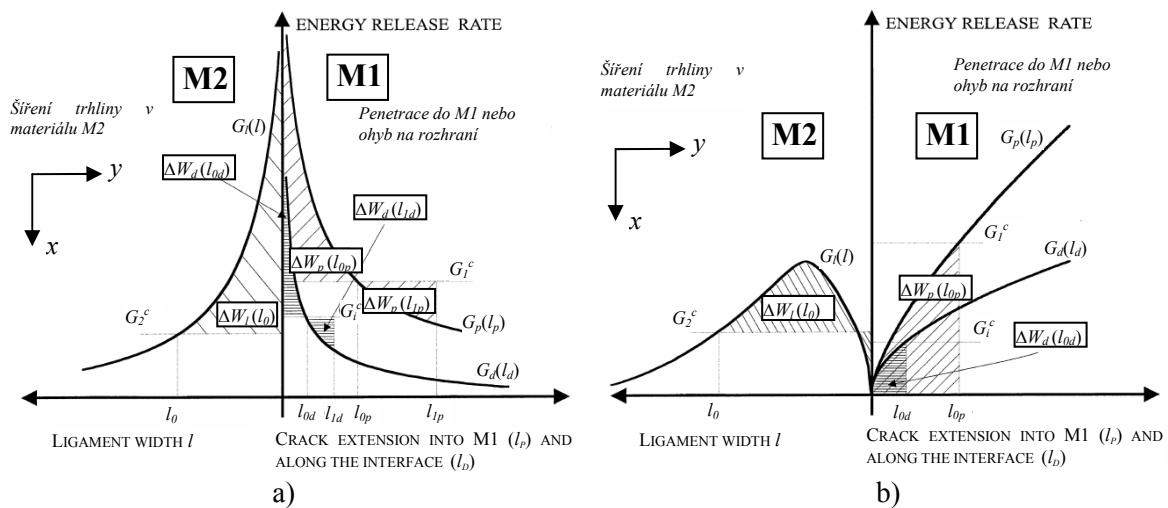
a Γ je Gamma funkce.

Fyzicky to znamená, že je zde vždy typicky jedna vada v délce vlákna l_c o pevnosti σ_{of} , kde $l_c = R\sigma_{of}/\tau$ je dvojnásobná délka prokluzu při aplikovaném zatížení σ_{of} .

5.3 Problémy lomových kritérií

Je velmi dobře známo, že zvýšení houževnatosti laminátů či kompozitů na bázi keramik může být dosaženo zavedením slabého rozhraní mezi jednotlivými vrstvami, či matricí a vláknem – viz [48]. Ohyb trhliny podél rozhraní potom vede že se trhlina otupí a v důsledku tento efekt zvýší energii požadovanou k dalšímu šíření trhliny. Pochopení mechanismu ohybu trhliny po rozhraní je tudíž nezbytný k definici např. vhodné mezivrstvy a optimální houževnatosti rozhraní, které jsou nezbytné pro zajištění tohoto jevu - [36]. K dosažení tohoto cíle lze použít různých přístupů.

Nespojitost v elastických vlastnostech na rozhraní silně ovlivňuje chování vývoje rychlosti uvolněné energie v okolí kořene trhliny ležící v blízkosti rozhraní. V případě silné singularity (trhlina leží v tužším materiálu a charakteristické vlastní číslo singularity má hodnotu $\delta < 1/2$), jsou rychlosti uvolněné energie $G_p(l_p=0)$, $G_d(l_d=0)$ pro trhlinu končící na rozhraní nekonečné a penetrace přes rozhraní či ohyb na rozhraní tak mohou nastat při libovolném konečném zatížení. Naopak potom, případ slabé singularity (trhlina leží v měkčím materiálu, $\delta > 1/2$) způsobí, že rychlosti uvolněné energie $G_p(l_p=0)$, $G_d(l_d=0)$ pro trhlinu končící na rozhraní jsou nulové a tudíž penetrace přes rozhraní či ohyb trhliny na rozhraní nelze předikovat pro žádné zatížení. Toto je nevýhoda klasické diferenciální teorie, kterou lze s úspěchem použít hlavně na případy trhlin v homogenních prostředích, avšak nikoliv již pro případy trhlin šířících se v blízkosti nějakých rozhraní. Zmíněný problém nulové nebo nekonečné rychlosti uvolněné energie může být vyřešen s pomocí tzv. „konečné lomové mechaniky“ - *finite fracture mechanics* [49], kde místo nekonečně malého přírůstku uijeme přírůstek konečné délky. Na následujícím obrázku jsou zobrazeny vývoje rychlosti uvolněné energie pro tři různé případy – viz [49]:



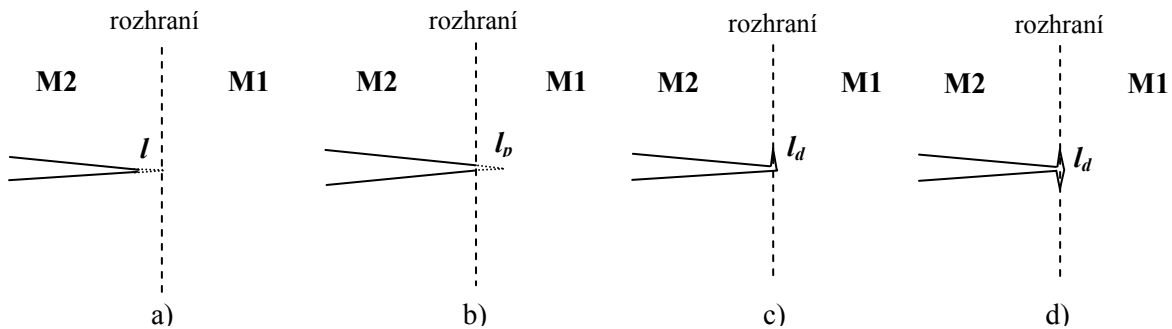
Obr. 5. Vývoj rychlosti uvolněné energie $G_I(l)$, $G_p(l_p)$, $G_d(l_d)$, v závislosti na přírůstcích trhliny (l , l_p , l_d): a) případ silné singularity ($\delta < 1/2$; $E_{1x} < E_{2x}$); b) případ slabé singularity ($\delta > 1/2$; $E_{1x} > E_{2x}$).

První případ (levá strana obou grafů) popisuje rychlost uvolněné energie $G_I(l)$ trhliny, které se blíží rozhraní zleva s nějakou zbytkovou vzdáleností od rozhraní l (Obr. 6.a). Na pravé straně grafů vyjadřují křivky rychlosti uvolněné energie $G_p(l_p)$ a $G_d(l_d)$ kdy se trhlina rozšíří do materiálu M1 nebo se odchýlí na rozhraní. Zmíněný problém s nekonečnou nebo nulovou rychlostí uvolněné energie je odsud zřejmý.

5.3.1 Analýza pomocí sdružených asymptotických rozvoju

Asymptotická analýza je účinným nástrojem pro odvození změny potenciální energie indukovanou růstem trhliny o nějaký konečný přírůstek délky – práce [37], [39] nebo [85]. Problém je řešen v rámci 2D lineární pružnosti. Jak je vidět z obrázku Obr. 6, jsou uvažovány různé dráhy trhliny (jednoduchý nebo dvojitý ohyb podél rozhraní a penetrace do materiálu M1). Aby byla dodržena platnost asymptotické analýzy, musí platit podmínka $l_d, l_p \rightarrow 0$. Znamená to, že poměr $l_{\square}/L \ll 1$, kde L je charakteristický rozměr hlavní trhliny. Je dobré poznamenat, že asymptotický předpoklad malého přírůstku trhliny má za důsledek že konstantní zatěžovací podmínky nemají žádný vliv na energetickou rovnováhu.

Následující obrázek znázorňuje 4 různé dráhy trhliny v okolí rozhraní, které byly uvažovány v rámci výše zmíněných prací. Trhlina buď dosahuje rozhraní se zbytkovou vzdáleností l (Obr. 6. a) nebo penetruje do materiálu M1 s přírůstkem l_p (Obr. 6. b) nebo je odchýlena podél rozhraní o přírůstek l_d (jednoduše nebo dvojitě – Obr. 6. c, d) - [50], [49].



Obr. 6. Dráhy trhliny: a) šíření směrem k rozhraní (zbytková vzdálenost l); b) trhlina penetrující do materiálu M1; c) jednoduchý ohyb trhliny; d) dvojitý ohyb trhliny.

Konkurence mezi ohybem hlavní trhliny podél rozhraní a penetrací do základního materiálu se posoudí dle velikosti doplňkové energie ΔW , kde směr šíření je dán maximální hodnotou této energie. Má-li trhlina penetrovat do základního materiálu namísto ohybu na rozhraní, musí platit následující podmínka:

$$\Delta W_d = \delta W_d - G_i^c l_d > \Delta W_p = \delta W_p - G_I^c l_p, \quad (26)$$

kde G_i^c je houževnatost rozhraní, G_I^c je lomová houževnatost materiálu M1 [15] a δW je změna potenciální energie mezi původní a novou pozicí trhliny. Změna potenciální energie δW mezi řešením neporušeného stavu $u_j^0(x_1, x_2)$ a porušeného $u_j^\varepsilon(x_1, x_2)$ pro nezměnné okrajové podmínky (nezměnné aplikované zatížení) je užitím Bettiho teorému následující:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(u_j^\varepsilon) n_i u_j^0 - \sigma_{ij}(u_j^0) n_i u_j^\varepsilon) ds = KH^2 \varepsilon^{2\delta} + \dots, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (27)$$

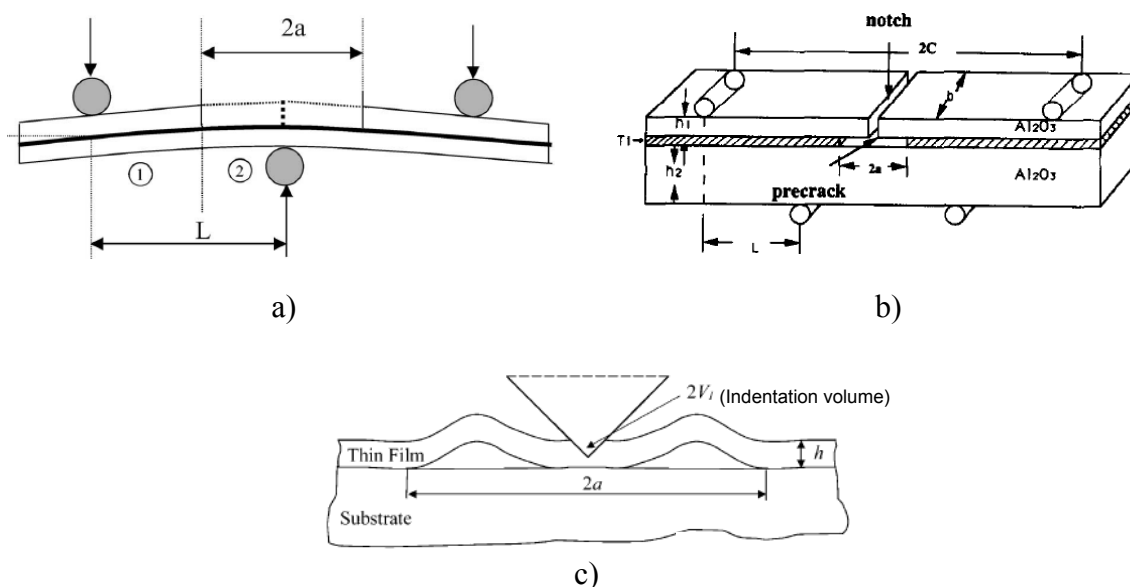
kde Γ libovolná dráha obklopující kořen trhliny a n_i jeho normála směřující do počátku. Rozvoje na vnitřní oblasti aproximují změnu potenciální energie δW pomocí faktoru K (křivkový integrál) závislejícím na porušení způsobené malým přírůstkem trhliny l, l_d, l_p , který lze spočítat pro daný případ pomocí MKP.

S pomocí asymptotické analýzy, He a Hutchinson [21] odvodily kritérium ohybu, které porovnávají poměr houževnatosti rozhraní G_i^c s houževnatostí penetrovaného materiálu G_I^c . Výsledek může být použit k určení rozsahu lomové houževnatosti vztaženého k materiálové houževnatosti prostředí, která zajistí že se trhlina odchýlí na rozhraní. Článek [20] navíc diskutuje vliv residuálních napětí (způsobených různou tepelnou roztažností) na rychlost uvolněné energie pro případ trhliny na rozhraní a penetrace trhliny. Přístup užitý He a

Hutchinsonem byl rozšířen uvážením anisotropie- [50] a potvrzen Tullockem et al. [82]. Martin et al. [49] vylepšil kritérium, které nevyžaduje žádný předpoklad týkající se poměru trhlinových přírůstků. Schopnost rozhraní odchýlit trhlínu je obvykle analyzována pomocí konkurence mezi ohybem a penetrací pro případ stacionární trhliny končící na rozhraní pod kolmým úhlem – např.: [22], [39] a [49]. Problém trhliny končící na rozhraní pod obecným úhlem je potom řešen např. v práci [21]. Postup řešení použitý v této práci je podobný nebo rozšířením metod integrálních rovnic užitých v dřívějších člancích – např. [10]. Ve všech případech jsou materiály na obou stranách rozhraní brány v úvahu jako elastické a isotropní.

5.3.2 Měření lomové houževnatosti rozhraní

Aby bylo možné popsat zda se trhlina odkloní na rozhraní nebo překročí rozhraní, musíme znát velmi důležitou mechanickou vlastnost – houževnatost rozhraní-viz (26). Dle literatury existuje mnoho metod jak tuto charakteristiku měřit pro různé typy materiálových konfigurací s rozhraními. Houževnatost rozhraní se zde měří pro tenké filmy na substrátech [84], kde tloušťka těchto filmů je uvažována v rozmezí 30-30000 nm. V práci [91] je užit test tříbodovým ohybem pro měření houževnatosti rozhraní $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{BN}$ kompozitu (Obr. 7 a)). Tuto metodu lze modifikovat na zkoušku čtyřbodovým ohybem a potom lze měřit houževnatost rozhraní se smíšenými módy [86]. Porovnání dalších typů zkušebních vzorků pro měření houževnatosti rozhraní je možné nalézt v práci [58]. Navržené vzorky jsou velmi vhodné pro vyšetřování této charakteristiky v širokém rozsahu smíšenosti módů, na nichž je tato charakteristika silně závislá.



Obr. 7. Některé z metod pro měření houževnatosti rozhraní a) test tříbodovým ohybem, b) test čtyřbodovým ohybem, c) indentační test.

6 Řešení konkrétních úloh

6.1 Popis pole napětí v okolí obecného koncentrátoru a výpočet GSIF

6.1.1 Singulární řešení problému polonekonečné trhliny kolmé na rozhraní dvou ortotropních materiálů pomocí explicitní L.E.S metody

Přes velký potenciál MKP při řešení problémů pružnosti a pevnosti, má tato metoda svá omezení. V případě přítomnosti koncentrátorů napětí, ani speciálně zvolená síť prvků v jejich okolí nemusí zabránit chybnému posouzení jejich singularity. Z tohoto důvodu je znalost teoretického singulárního řešení výhodná nejen z důvodů získání dodatečných informací o napjatosti v okolí koncentrátoru, ale také z důvodů zpřesnění konečnoprvkových výpočtů.

Exponent singularity napětí před čelem trhliny δ je řešením nelineární rovnice pro problém vlastních čísel jisté soustavy homogenních lineárních rovnic. Úloha polonekonečné trhliny kolmé k rozhraní dvou ortotropních materiálů je speciálním případem bi-materiálového vrubu, viz např. Desmorat a Leckie [12].

Napětí v blízkém okolí čela trhliny je úměrné $r^{\delta-1}$, posuvy r^δ . Zde r značí vzdálenost od čela trhliny. V případě trhliny kolmé k rozhraní dvou materiálů, je δ reálné. Navíc, z energetických důvodů a singulárního chování napětí musí platit, že

$$0 < \delta < 1 \quad (28)$$

Hodnota δ závisí na geometrii v blízkém okolí čela trhliny a na materiálových vlastnostech každého z obou prostředí.

V rovinné pružnosti anisotropních prostředí lze využít tzv. Lechnického-Strohův formalismus založený na pracích [43], [13] a [73]. Základem je popis napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů, které formálně splňují podmínky rovnováhy, kompatibility a lineární závislosti mezi deformací a napětím a podle typu úlohy také dané okrajové podmínky. V případě obecné rovinné anisotropní pružnosti je nutné uvažovat všechny složky tenzoru napětí a deformace. K zjednodušení může dojít v případě, když matice tuhosti příp. poddajnosti vykazuje roviny symetrie, jak je tomu např. u ortotropních materiálů, kdy se počet složek tenzoru napětí a deformace sníží pouze na složky a v případě zkrácené notace se tenzory deformace a napětí $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$ mohou psát jako vektory ¹:

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T, \quad \underline{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T \quad (29)$$

a matice tuhosti a poddajnosti se zredukuje na tvar

$$\underline{C}_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad \underline{S}_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (30)$$

V okolí vrcholu trhliny se pro posuvy, napětí a výslednou sílu podél polopřímky vedoucí z počátku souřadného může psát

$$\underline{\sigma} = H \cdot r^{\delta-1} \cdot \underline{F}(\theta), \quad \mathbf{u} = H \cdot r^\delta \cdot \mathbf{g}(\theta), \quad -\mathbf{T} = H \cdot r^\delta \cdot \mathbf{f}(\theta) \quad (31)$$

¹ Poznámka ke značení matic a vektorů v textu:

- matice jsou zde v této kapitole značeny velkým písmenem latinské abecedy, zvýrazněné podtržením. Výjimkou jsou pouze tenzory napětí a deformace, pro které je použita malá řecká abeceda. Vektory jsou značeny malými písmeny latinské i řecké abecedy zvýrazněné tučně.

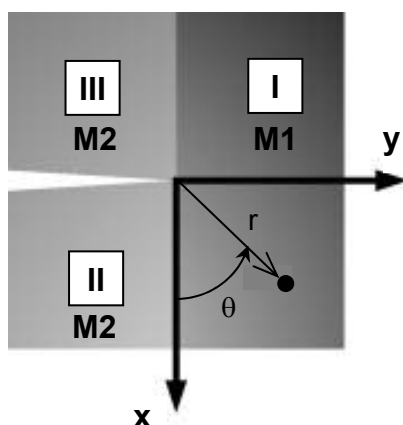
Zde H značí zobecněný součinitel intenzity napětí a θ úhel, který svírá průvodič r s kladnou osou x - viz Obr. 8. Pro matici \underline{F} a vektory \mathbf{g} , \mathbf{f} platí

$$\underline{F} = \underline{L} \cdot \underline{e}^{\delta-1} \cdot \underline{\Phi} + \underline{\bar{L}} \cdot \underline{e}^{\delta-1} \cdot \underline{\bar{\Phi}}, \quad \mathbf{g} = \underline{A} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\bar{A}} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \mathbf{f} = \underline{L} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\bar{L}} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}} \quad (32)$$

kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + \frac{s_{22}}{\mu_1} & s_{12}\mu_2 + \frac{s_{22}}{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (33a)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = [\phi_1 \quad \phi_2]^T, \quad \underline{\Phi} = \delta \cdot \text{diag}(\phi_1, \phi_2) \cdot \underline{L}^T, \quad \underline{e} = \text{diag}(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta, \cos \theta + \mu_2 \sin \theta) \quad (33b)$$



Obr. 8. Schéma polonekonečné trhliny kolmé k rozhraní dvou ortotropních materiálů

Nejdříve bude věnována pozornost parametrům μ_1 a μ_2 . Jde o komplexní čísla s kladnou reálnou částí, která jsou kořeny rovnice čtvrtého řádu

$$\lambda\mu^4 + 2\rho\lambda^2\mu + 1 = 0 \quad (34)$$

kde λ a ρ jsou konstanty vyjadřující míru anisotropie prostředí

$$\lambda = \frac{s_{11}}{s_{22}}, \quad \rho = \frac{1}{2}(2s_{12} + s_{66})(s_{11}s_{22})^{-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

Obecné řešení pro parametry μ_j je následující

$$\begin{aligned} \mu_1 &= i\lambda^{\frac{1}{4}}(n+m), & \mu_2 &= i\lambda^{\frac{1}{4}}(n+m) & \text{pro } 1 < \rho < \infty \\ \mu_1 &= \lambda^{\frac{1}{4}}(in+m), & \mu_2 &= \lambda^{\frac{1}{4}}(in+m) & \text{pro } -1 < \rho < 1 \end{aligned} \quad (36)$$

kde

$$\mu_1 = \mu_2 = i\lambda^{\frac{1}{4}}(n+m) \quad \text{pro } \rho = 1$$

$$n = \left[\frac{1}{2}(1+\rho) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = \left[\frac{1}{2}(1-\rho) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Nyní bude věnována pozornost vektoru $\boldsymbol{\varphi}$, jehož hodnota se určí z okrajových podmínek.

Vhodným nastavením vektoru $\boldsymbol{\varphi}$ splníme okrajové podmínky v okolí vrcholu trhliny. Okrajové podmínky jsou dvojí: vzájemné spojení obou materiálů se předpokládá jako ideální, tj. pro $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ musí platit

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}^I &= -\mathbf{T}^{II}, & \mathbf{u}^I &= \mathbf{u}^{II} \\ -\mathbf{T}^{II} &= -\mathbf{T}^{III}, & \mathbf{u}^{II} &= \mathbf{u}^{III} \end{aligned} \quad (38)$$

a dále líce trhlin musí být bez napětí, tj. pro $\theta = -\pi/2$ a $\theta = 3\pi/2$ musí platit

$$-\mathbf{T}^I = 0, \quad -\mathbf{T}^{III} = 0 \quad (39)$$

Indexy *I*, *II* a *III* značí oblast bi-materiálu, které se daná okrajová podmínka týká, viz. Obr. 8. Pomocí druhého a třetího vztahu v (31) a okrajových podmínek (38) a (39) se sestaví soustava dvanácti homogenních lineárních rovnic

$$\underline{K}(\delta) \mathbf{v} = 0, \quad (40)$$

kde matice soustavy \underline{K} a vektor \mathbf{v} mají tvar

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \underline{B}_0^I & -\underline{\bar{B}}_0^I & -\underline{B}_0^{II} & -\underline{\bar{B}}_0^{II} & \underline{O} & \underline{O} \\ \underline{X}_0^I & \underline{\bar{X}}_0^I & -\underline{X}_1^{II} & -\underline{\bar{X}}_1^{II} & \underline{O} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{O} & \underline{B}_1^{II} & -\underline{\bar{B}}_1^{II} & -\underline{B}_1^{III} & \underline{\bar{B}}_1^{III} \\ \underline{O} & \underline{O} & \underline{X}_1^{II} & \underline{\bar{X}}_1^{II} & -\underline{X}_1^{III} & -\underline{\bar{X}}_1^{III} \\ \underline{X}_2^I & \underline{\bar{X}}_2^I & \underline{O} & \underline{O} & \underline{O} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{O} & \underline{O} & \underline{O} & \underline{X}_3^{III} & \underline{\bar{X}}_3^{III} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \underline{L}^I \underline{\phi}^I \\ \underline{\bar{L}}^I \underline{\bar{\phi}}^I \\ \underline{L}^{II} \underline{\phi}^{II} \\ \underline{\bar{L}}^{II} \underline{\bar{\phi}}^{II} \\ \underline{L}^{III} \underline{\phi}^{III} \\ \underline{\bar{L}}^{III} \underline{\bar{\phi}}^{III} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Zde pruh nad maticí je symbol komplexní sdruženosti, \underline{O} značí nulovou matici 2×2 a pro $j = 0 \dots 3$, $J = I \dots III$ platí

$$\underline{B}_j^J = i \underline{A}^J \underline{e}_j^J (\underline{L}^J)^{-1} \quad \underline{X}_j^J = \underline{L}^J \underline{e}_j^J (\underline{L}^J)^{-1} \quad (42)$$

kde

$$\begin{aligned} \underline{e}_0^I &= \underline{e}_0^{II} = \text{diag}[1, 1], & \underline{e}_1^{II} &= \underline{e}_1^{III} = \text{diag}[e^{i\delta\pi}, e^{i\delta\pi}], \\ \underline{e}_2^I &= \text{diag}[\mu_1^I e^{i\delta\pi}, \mu_2^I e^{i\delta\pi}], & \underline{e}_3^{III} &= \text{diag}[\mu_1^{III} e^{i\delta 3\pi}, \mu_2^{III} e^{i\delta 3\pi}] \end{aligned} \quad (43)$$

Aby soustava (40) měla netriviální řešení, musí být rovnice soustavy vzájemně lineárně závislé, tj. determinant matice soustavy \underline{K} musí být nulový

$$\det(\underline{K}(\delta)) = 0 \quad (44)$$

Rovnice (44) je nelineární rovnicí, jejíž nejmenší kladný kořen δ je hledaný exponent singularity. S exponentem singularity δ je úzce spojen problém hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice \underline{K} . Dosazením exponentu δ zpět do matice \underline{K} se jako řešení soustavy (40) dostane vlastní vektor matice \underline{K} , který odpovídá jejímu vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Exponent δ je doprovázen svým duálním protějškem $\delta^* = -\delta$ a jemu odpovídajícím vlastním vektorem \mathbf{v}^* , viz [59], který je řešením sdružené homogenní soustavy rovnic

$$\underline{K}(\delta^*) \mathbf{v}^* = 0 \quad (45)$$

Znalost duálního (pomocného) řešení je důležitá k vyjádření zobecněného součinitele intenzity napětí, příp. T-napětí, pomocí tzv. ψ -integrálu, viz [12]. Řešení vlastních čísel a vektorů na konkrétní úloze (užitím matematického softwaru MAPLE) je popsáno v metodickém listě č. 1 (viz příloha nebo webové stránky ÚMTMB).

Poznámka:

Výše uvedené vztahy platí jak pro rovinnou napjatost, tak i v případě rovinné deformace. Je však nutné přepočítat koeficienty matice poddajnosti \underline{S}_{ij} podle vztahu

$$s'_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}} \quad (46)$$

6.1.2 Výpočet Zobecněného součinitele intenzity napětí

Pro výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí (dále GSIF) byla zvolena metoda dvoustavových (interakčních) integrálů, která ve spojení s deformační variantou MKP poskytuje efektivní prostředek pro výpočet jak zobecněných součinitelů intenzity napětí, tak T-napětí. V daném případě bylo výhodné použít tzv. ψ -integrál nezávislý na integrační cestě – [12], definovaný následovně:

$$W^a - W^b = \psi(u^a, u^b) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{\sigma}^a \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^b - \underline{\sigma}^b \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^a) dS \quad (47)$$

kde Γ je libovolná integrační cesta vedená v okolí singularity, horní indexy a, b, označují 2 nezávislé rovnovážné stavy. Uvnitř oblasti ohraničené křivkou Γ není aplikováno žádné vnější zatížení.

Podstata metody spočívá v porovnání speciálně definovaného skalárního součinu singulárního řešení ($\underline{\sigma} = H \cdot r^{\delta-1} \underline{F}$, $\mathbf{u} = H \cdot r^{\delta} \mathbf{g}$) s tzv. pomocným řešením ($\underline{\sigma}^* = r^{\delta^*-1} \underline{F}^*$, $\mathbf{u}^* = r^{\delta^*} \mathbf{g}^*$) a stejného pomocného řešení s referenčním řešením (posuvy \mathbf{U} a odpovídající napětí $\underline{\Sigma}$ získané např. pomocí MKP). Pomocné řešení je více singulární než samotné singulární řešení popisující stav v okolí obecného vrubu a má tu vlastnost, že dělá integrál $\psi_{\Gamma_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ konečným. Na základě nezávislosti ψ -integrálu na integrační cestě, lze psát:

$$\int_{\Gamma_1} (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* - \underline{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = \int_{\Gamma_2} (\underline{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* - \underline{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \quad (48)$$

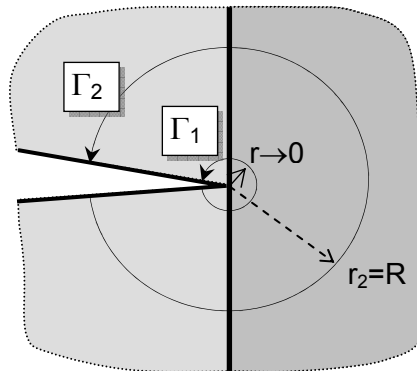
nebo zkráceně

$$\psi_{\Gamma_1}(H \cdot r^{\delta} \mathbf{g}, r^{\delta^*} \mathbf{g}^*) = \psi_{\Gamma_2}(\mathbf{U}, r^{\delta^*} \mathbf{g}^*) \quad (49)$$

kde Γ_1, Γ_2 jsou libovolné dvě integrační cesty obklopující kořen trhliny (viz Obr. 9) a \mathbf{n} je vektor vnější normály. δ je exponent singularity posuvů singulárního řešení a δ^* exponent singularity posuvů pomocného řešení.

Zobecněný součinitel intenzity napětí potom obdržíme z rovnice (49)

$$H = \frac{\psi_{\Gamma_2}(\mathbf{U}, r^{\delta^*} \mathbf{g}^*)}{\psi_{\Gamma_1}(r^{\delta} \mathbf{g}, r^{\delta^*} \mathbf{g}^*)} \quad (50)$$

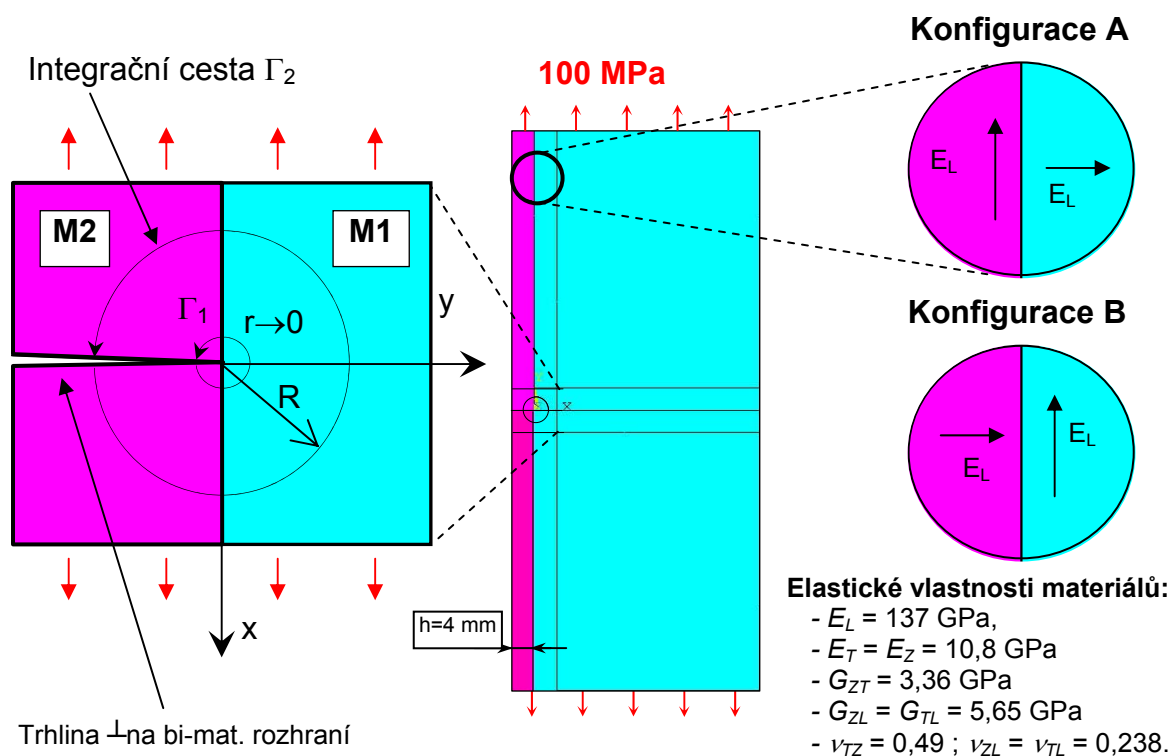


Obr. 9. Integrační cesty Γ_1 a Γ_2 v okolí singulárního bodu

6.1.3 Numerické výsledky

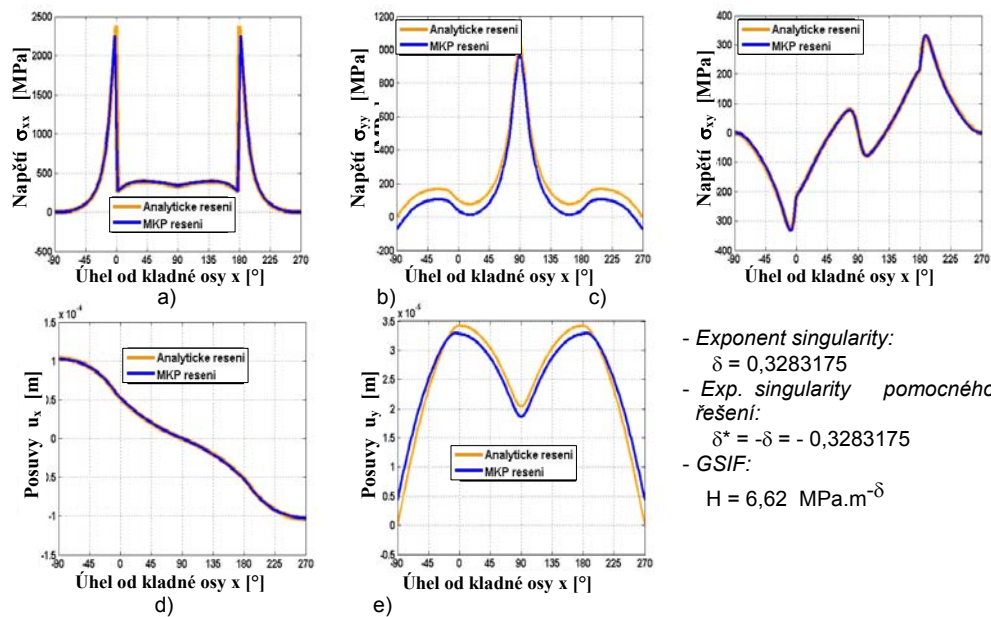
Výpočet zobecněného součinitele byl proveden pomocí matematického softwaru MATLAB 7.1. Numerické hodnoty posuvů a napětích v uzlech vzdálených od kořene trhliny byly získány z MKP systému ANSYS 10.0. Popis použití vstupních souborů do těchto softwarů viz metodický list č.2.

Studovaný vzorek tvoří 2 vrstvy elastických, příčně ortotropních materiálů M1 a M2, přičemž elastické vlastnosti těchto materiálů jsou shodné. Liší se pouze hlavní materiálové směry – L. Výpočty budou demonstrovány na 2 odlišných materiálových konfiguracích (viz Obr. 10).

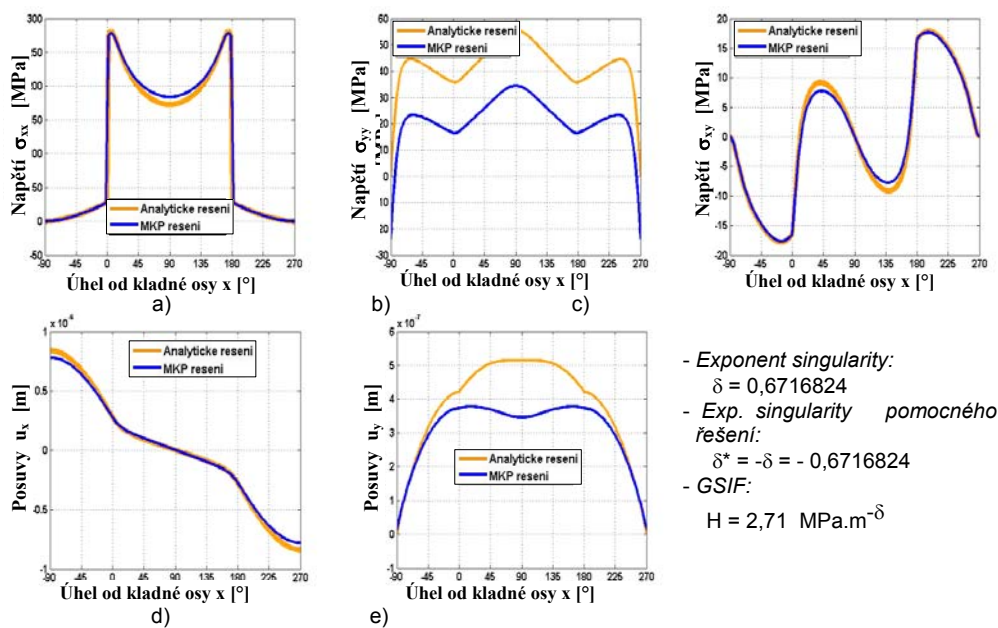


Obr. 10. Studovaný bi-materiálový vzorek a materiálové konfigurace použité do výpočtů.

Následující obrázky porovnávají průběhy napětí a posuvů podél příslušné integrační cesty o poloměru $R=1$ mm, získané ze singulárního řešení a numericky pomocí MKP (vše pro 2 materiálové konfigurace A a B – viz Obr. 10). Shoda obou řešení je až na napětí σ_{yy} a posuvy u_y velmi dobrá. Menší rozdíl hodnot numerického a analytického řešení u napětí σ_{yy} má vesměs konstantní charakter a je přičítán dalšímu parametru v asymptotickém rozvoji pro napětí – T-napětí, který zatím v rozvoji pro napětí zahrnut není.



Obr. 11. Konfigurace A: Průběhy napětí a posuvů podél integrační cesty $R=1 \text{ mm}$: a) –c) – průběhy napětí; d), e) průběhy posuvů



Obr. 12. Konfigurace B: Průběhy napětí a posuvů podél integrační cesty $R=1 \text{ mm}$: a) –c) – průběhy napětí; d), e) průběhy posuvů

6.2 Problém přemostění trhliny

Uvažujme povrchovou trhlinu kolmou a s vrcholem na rozhraní tenké ortotropní vrstvy a ortotropního substrátu. Trhlina leží ve zmiňené povrchové vrstvě o tloušťce h a je po celé své délce přemostěna dlouhými vlákny kolmo k jejím čelům. Hlavním cílem je nyní vypracovat techniku pro výpočet zobecněného mostíčního faktoru intenzity napětí H_{br} , charakterizujícího vliv přemostění na výsledné pole napětí v okolí kořeně takového obecného koncentrátoru. O tento zobecněný mostíční faktor intenzity napětí se potom sníží aplikovaný zobecněný součinitel intenzity napětí, popisující napěťové pole v okolí stejné, avšak nepřemostěné trhliny.

6.2.1 Rekurentní vztahy pro výpočet otevření přemostěné trhliny a mostíčního napětí

Aby bylo možné spočítat mostíční napětí je třeba znát posuvy (či otevření) líců trhliny v závislosti na daném zatížení. Pro tento výpočet se použijí následující rekurentní vztahy:

1) V prvním kroku se vypočte velikost otevření horního líce trhliny při zatížení bi-materiálového tělesa napětím σ_I z následujícího vztahu:

$$v_{appl(1)}(y) = v_{appl0}(y) \sigma_1 \quad (51)$$

kde $v_{appl0}(y)$ je posuv horního líce v důsledku jednotkového zatížení $\sigma_0=1\text{MPa}$, spočítané pomocí MKP.

2) Ve druhém kroku se vypočítá výsledné otevření přemostěné trhliny. Tento krok rozdělíme na několik dílčích kroků, kde každý z nich povede k postupnému zpřesňování výsledného otevření. První aproximaci nastavíme tak že $v_{n,1} = v_{appl(1)}$, pro $n=1$ (tj, že otevření přemostěné trhliny bude rovno otevření nepřemostěné trhliny zatížené napětím σ_I). Potom můžeme již dle zvoleného modelu přemostění vypočítat mostíční napětí – buď dle jednoduššího kvadratickeho zákona (52) nebo upraveného vztahu zohledňujícího statistické rozdělení pevnosti vláken a jejich vytahování z matrice - (53) – více viz Kotoul et al [34].

$$a) \sigma_{br(n,1)}(y) = \beta \sqrt{v_{n,1}(y)}, \quad n=1 \quad (52)$$

$$b) \hat{\sigma}_{br(n,1)} = \beta \sqrt{v_{n,1}(y)} \cdot \underbrace{\exp \left[- \left(\frac{\sigma_{br(n,1)}}{c_f \Sigma} \right)^{m+1} \right]}_{\text{podíl neporušených vláken}} + \sigma_{P(n,1)} \underbrace{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{br(n,1)}}{c_f \Sigma} \right)^{m+1} \right] \right\}}_{\text{podíl přetržených vláken}}, \quad n=1 \quad (53)$$

$$\sigma_{P(n,1)}(y) = \frac{2c_f \tau}{R} ((h) - v_{n,1}(y)), \quad n=1 \quad (54)$$

$$v_{br(n,1)}(y) = \sum_i v_{br0}(y, y_i) \cdot \hat{\sigma}_{br(n,1)}(y_i) \cdot S(y_i) \quad (55)$$

Zde $v_{br0}(y, y_i)$ je otevření líce trhliny po délce y v důsledku působení jednotkové izolované síly v bodě y_i , $\hat{\sigma}_{br(n,1)}(y_i)$ je mostíční napětí vypočítané v daném kroku a $S(y_i)$ je plocha náležející danému uzlu (vzdálenost mezi aktuálním a předcházejícím uzlem).

V dalším pod-kroku se přiblížíme výslednému otevření líce trhliny dle tohoto vztahu:

$$v_{n,m_n+1}(y) = v_{n,m_n} \frac{v_{appl(n)}(y)}{v_{n,m_n}(y) - v_{br(n,m_n)}(y)} \dots \quad n=1, \quad (56)$$

kde $v_{br(n,m_n)} < 0$ je otevření líce trhliny v důsledku mostíčního napětí

$$\hat{\sigma}_{br(n,m_n)}(y) = \hat{\sigma}_{br(n,m_n)}[v_{n,m_n}(y)].$$

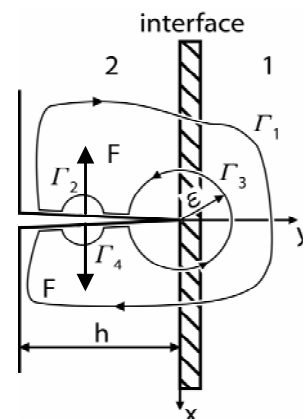
Rekurentní výpočet skončí, jakmile je splněna následující podmínka

$$\left(\frac{v_{n,m_n+1}(y) - v_{n,m_n}(y)}{v_{n,m_n+1}(y)} \right)^2 < TOL, \quad (57)$$

kde levá strana rovnice (57) udává kvadrát rozdílu aproximace v aktuálním a předcházejícím kroku ku aproximaci v aktuálním kroku a TOL je předepsaná tolerance.

6.2.2 Nalezení mosticích váhové funkce

Hodnoty váhové funkce potřebné k výpočtu zobecněného mosticího součinitele intenzity napětí určíme postupným zatěžováním bi-materiálového modelu podél líců trhliny dvojicí osamělých sil (viz Obr.12), přičemž pro každý zátěžný krok určíme zobecněný součinitel intenzity napětí způsobený touto dvojicí sil. Působící dvojice sil se postupně umisťují v různých bodech od kořene až po volných povrch materiálu 2. Součinitel intenzity napětí charakterizující daný zátěžný stav (od dvojice sil) vypočítáme podobným způsobem jako zobecněný součinitel intenzity napětí, popisující pole napětí v okolí obecného koncentrátoru u tělesa podrobeného nějakému vnějšímu zatížení – viz (50).

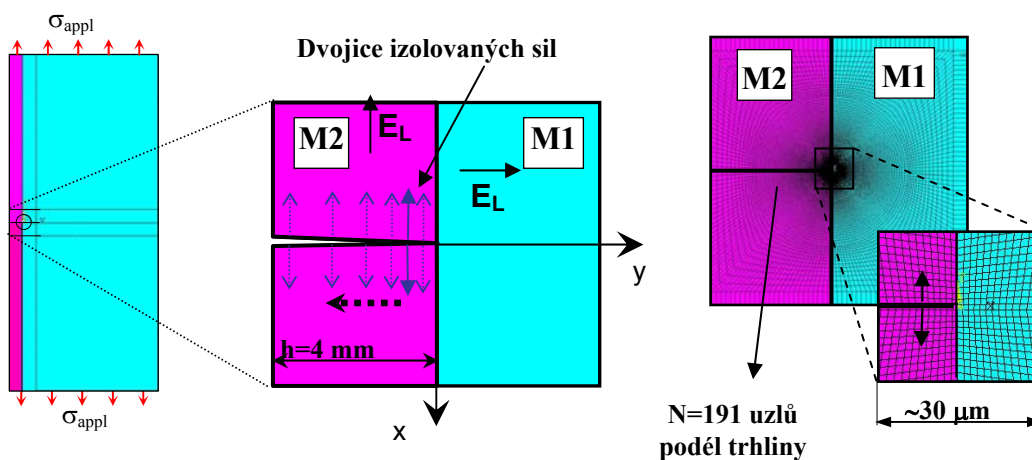


Obr. 13. Integrační cesty pro výpočet hodnot váhové funkce

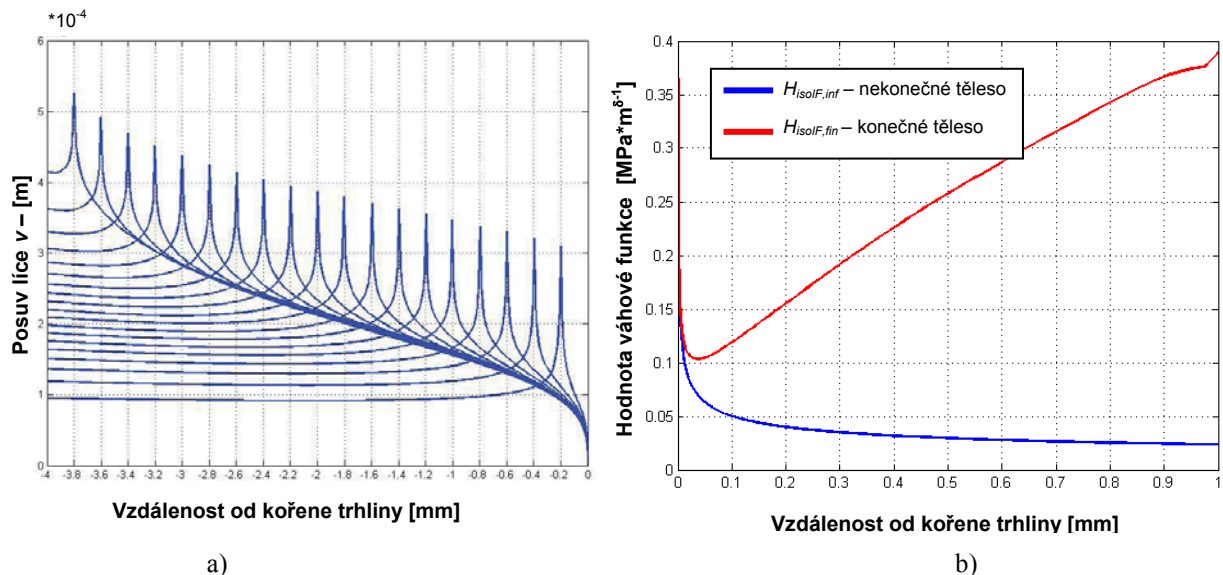
Výpočet faktoru intenzity napětí od dvojice sil bude potom odlišný pouze v tom, že integrál podél líců trhliny nebude díky přítomnosti izolovaných sil nulový, ale bude mít konečnou velikost – viz [60]. Jeho hodnotu potom spočítáme pomocí vztahu:

$$H_{isolF}(c_1 - c_2) = \int_{\Gamma_3} (\sigma_{ij} n_j \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i) dl + F_i \hat{u}_i(x=0, y), \quad (58)$$

kde H_{isolF} je hledaný faktor intenzity napětí, rozdíl $(c_1 - c_2)$ je integrál přes křivku Γ_3 (poloměr $\Gamma_3 \rightarrow 0$) – [33], a \hat{u}_i je tzv. pomocné řešení pro $x=0, y=y_0$. Definice pomocného řešení viz. [12].



Obr. 14. Postupné zatěžování vzorku dvojicí izolovaných sil podél líců trhliny



Obr. 15. a) Posuvy líce trhliny zatíženého izolovanou silou ve vybraných uzlech podél trhliny; b) Tvar váhové funkce $W(y,h)$ s uvážením přemostěné trhliny v povrchové vrstvy s konečnou tloušťkou nebo polonekonečné přemostěné trhliny.

6.2.3 Výpočet mostíciho faktoru intenzity napětí

Mostící napětí vyvolá vznik zobecněného mostíciho faktoru intenzity napětí H_{br} , o který se následně sníží aplikovaný zobecněný faktor intenzity napětí způsobený vnějším vzdáleným zatížením. Vztah pro výpočet zobecněného mostíciho součinitele intenzity napětí H_{br} je potom:

$$H_{br} = \int_0^{-h} W(y, h) \sigma_{br}(y) dy, \quad (59)$$

kde $W(y,h)$ je příslušná mostící váhová funkce – viz předchozí oddíl a $\sigma_{br}(y)$ je mostící napětí podél čela trhliny, nalezené dle výše uvedených rekurentních vztahů.

Vztah pro výsledný faktor intenzity napětí H_{tip} přemostěné trhliny je následující:

$$H_{tip} = H_{appl} - H_{br}, \quad (60)$$

kde H_{appl} je aplikovaný zobecněný součinitel intenzity napětí spočítaný například metodou dvoustavového ψ -integrálu – viz [12] nebo technikou spojitě rozložených dislokací – [33].

6.2.4 Numerické výsledky

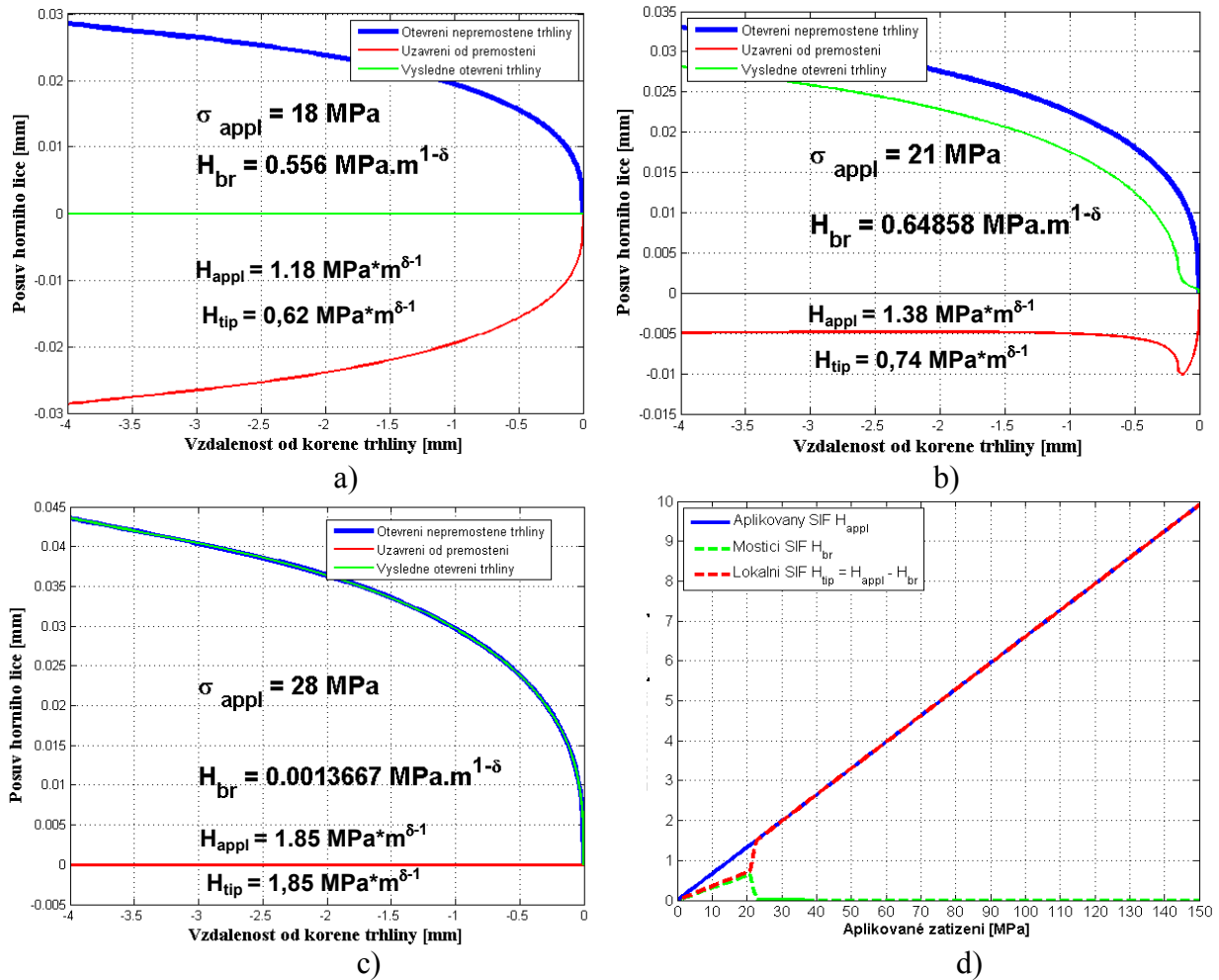
Studovaný model bi-materiálu tvoří 2 vrstvy elastických ortotropních materiálů M1 a M2 - viz Obr. 14, přičemž elastické vlastnosti těchto materiálů jsou shodné: $E_L = 137$ GPa, $E_T = E_Z = 10,8$ GPa $G_{ZT} = 3,36$ GPa $\nu_{TZ} = 0,49$ $G_{ZL} = G_{TL} = 5,65$ GPa $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,238$. Liší se pouze hlavní materiálové směry - L, které jsou vůči sobě pootočené o 90° (Obr. 14).

- Kvadratický model přemostění s konstantní pevností vláken

U tohoto modelu zůstávají vlákna až do určité kritické hodnoty aplikovaného zatížení neporušená a do jisté vzdálenosti od čela trhliny dochází k jejich prokluzu vzhledem k matici (třecí vazba). Jedná se tedy de facto o spojitě rozložení mostícih pružin. Část vláken se po dosažení jisté hodnoty aplikovaného zatížení náhle poruší a zůstává potom přemostěna pouze oblast v blízkém okolí kořene trhliny, která se s dalším rostoucím aplikovaným zatížením σ_{appl} stále zmenšuje až do okamžiku, kdy se poruší i zbylá vlákna a trhlina zůstane nepřemostěná – viz Obr. 16. Vlákna se u tohoto modelu vždy porušují v rovině trhliny.

Hodnoty veličin použitých v modelu přemostění:

- $c_f = 0.4$ (objemový podíl vláken), $E_f = 228\,000$ MPa (modul pružnosti v tahu vláken), $E_m = 76\,000$ MPa (modul pružnosti v tahu matrice), $E_c = 137\,000$ MPa (výsledný modul pružnosti kompozitu), $R = 0.007$ mm (poloměr vláken), $\tau = 7$ MPa (smyková rezistence prokluzu mezi vláknem a matricí), $\sigma_{pf} = 1400$ MPa (tahová pevnost vláken)

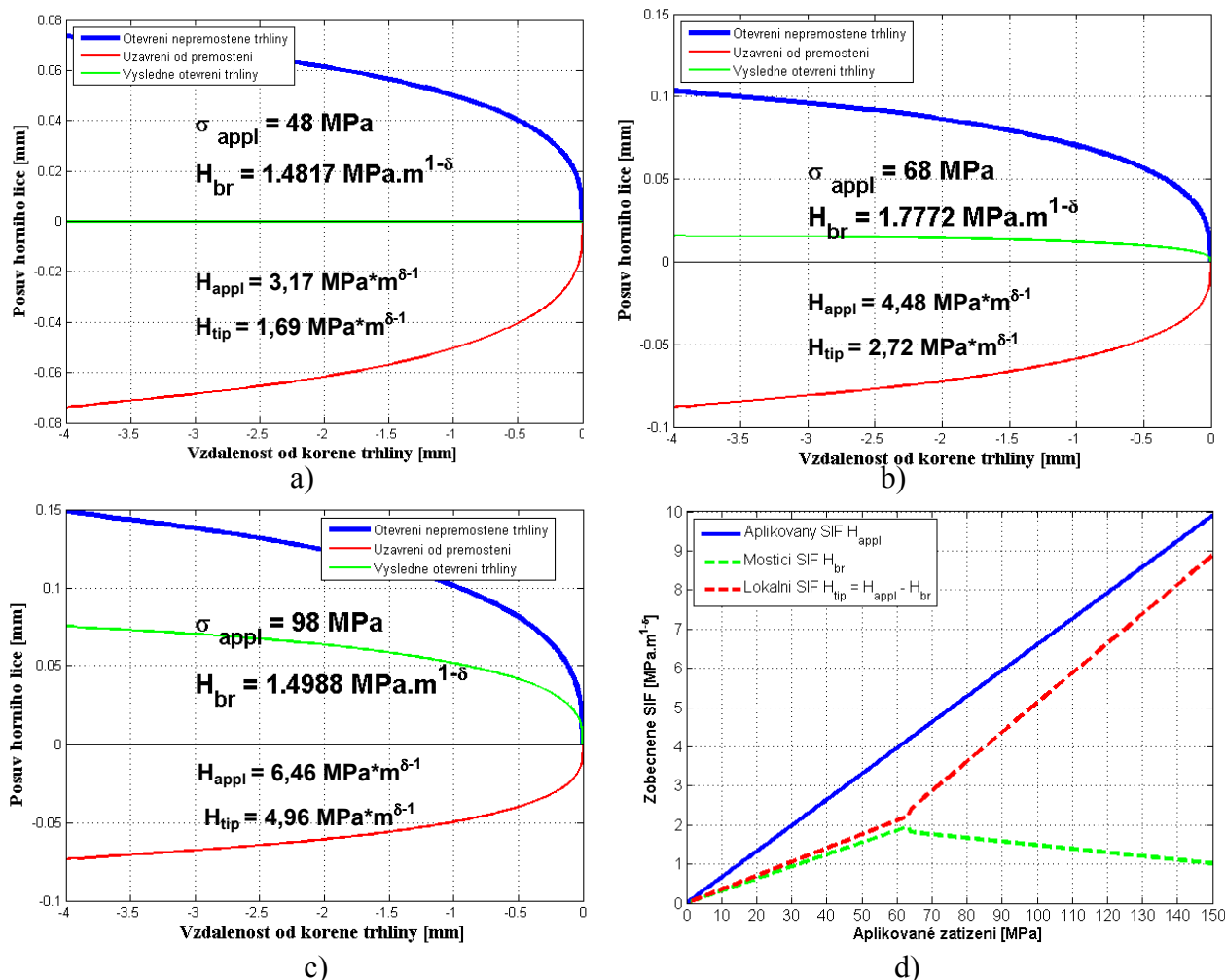


Obr. 16. a) - c) Posuv horního líce trhliny a vliv přemostění v závislosti na velikosti aplikovaného zatížení; d) Závislost mostičního a výsledného zobecněného faktoru intenzity napětí (SIF) na velikosti aplikovaného zatížení.

- Modifikovaný model přemostění uvažující vytahování vláken a jejich tahovou pevnost jako statistickou veličinu

Hodnoty veličin použitých v tomto modelu přemostění jsou shodné s předchozím modelem, vystupuje zde navíc akorát Weibullův modul o hodnotě $m=3$.

Z následujících obrázků je patrné chování tohoto pokročilejšího modelu v závislosti na aplikovaném zatížení.



Obr. 17. a) - c) Posuv horního líce trhliny a vliv přemostění v závislosti na velikosti aplikovaného zatížení; d) Závislost mostičího a výsledného zobecněného faktoru intenzity napětí (SIF) na velikosti aplikovaného zatížení.

K porušování vláken nedochází u tohoto modelu pouze v rovině trhliny, ale díky statistickému rozdělení pevnosti vlákna se tak může stát i uvnitř matrice, kde i po prasknutí vlákna dochází vlivem třecí vazby k přenosu zatížení a to až do jeho úplného vytažení z matrice. Tento model tak vykazuje u vyšších aplikovaných zatížení vyšší odolnost přemostění vůči tomuto zatížení než předchozí model a jak se ukázalo např. v práci [34] vede i ve srovnání s experimentem k přesnějším hodnotám, jelikož lépe postihuje skutečnost jak se vlákna v praxi porušují. Opět samotné řešení problému užitím MKP a zpracování dat v MATLABU je popsáno v metodickém listě č.3.

6.3 Kritéria šíření trhliny končící na rozhraní dvou materiálů

Hlavním cílem je navrhnout proceduru, která by umožnila predikci vzniku lomu z obecného koncentrátoru napětí (Obr. 1 a). Zejména bude uvažována možnost ohybu trhliny podél rozhraní (jednoduchý nebo dvojitý ohyb) a penetrace hlavní trhliny přes rozhraní. Použitá kritéria jsou založena na energetickém přístupu.

6.3.1 Lomová kritéria pro posouzení směru šíření lomu

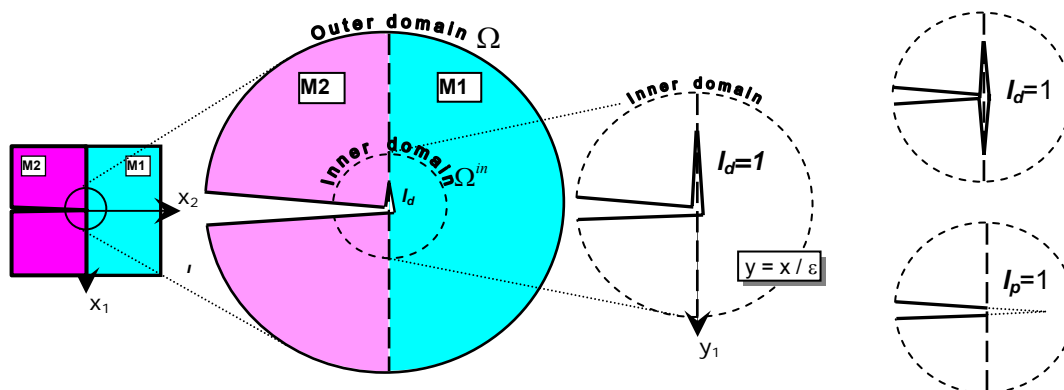
V následujícím budou uvažovány tři možné způsoby šíření hlavní trhliny končící na bimateriálovém rozhraní - viz Obr. 6 b), c), d):

6.3.2 Asymptotická analýza

V případě trhliny končící na rozhraní je diferenciální analýza nevhodná kvůli nespojitosti elastických vlastností na rozhraní: problém s nulovou a nekonečnou rychlostí uvolněné energie byl již prezentován v kapitole 5.3. Z toho důvodu je nutné použít jinou techniku, kterou tento problém lze obejít. Využijeme zde teorie “konečné lomové mechaniky” (finite fracture mechanics), kde namísto přírůstků nekonečně malých jsou uvažovány přírůstky trhliny konečné délky l . Konkurence mezi ohybem trhliny a penetrací přes rozhraní je vyhodnocena užitím podmínky, že trhlina se bude šířit tím směrem, který maximalizuje doplňkovou energii ΔW uvolněnou lomovým procesem.. Jestliže se má trhlina odchýlit na rozhraní přednostně před penetrací přes rozhraní, musí být splněna následující podmínka:

$$\Delta W_d = \delta W_d - G_i^c l_d > \Delta W_p = \delta W_p - G_1^c l_p \quad (61)$$

kde G_{ci} je houževnatost rozhraní, G_{c1} je houževnatost materiálu M1 a δW je změna potenciální energie mezi původní a novou pozicí trhliny. Pro výpočet této změny se využije technika sdružených asymptotických rozvoju. Uvažujme porušení oblasti Ω s trhlinou dosahující na rozhraní mezi materiály M2 a M1 –viz následující obrázek Obr. 18:



Obr. 18 Zvětšená oblast okolí kořene trhliny porušeného malým přírůstkem trhliny

Porušením je myšlen odchýlený (jednoduše nebo dvojitě) přírůstek trhliny délky l_d nebo přírůstek penetrující trhliny délky l_p , kde ϵ je parametr porušení definovaný jako $\epsilon = l/L \ll 1$, $l = l_p, l_d$, kde L je charakteristický rozměr oblasti Ω . Zavedeme dále druhé měřítko pohledu na problém, pomocí měřítkem zvětšených souřadnic:

$$y = \frac{x}{\epsilon}, \text{ or } (y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{x_2}{\epsilon} \right), \quad (62)$$

kteří poskytují $1/\epsilon$ krát zvětšený pohled na oblast obklopující kořen trhliny. Posuvy \mathbf{u}^ϵ porušeného elastického problému v důsledku přítomnosti trhliny mohou být nyní vyjádřeny

pomocí regulární souřadnice x a „zazoomované“ souřadnice y :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^\varepsilon(\varepsilon y) = \mathbf{V}^\varepsilon(y), \quad (63)$$

kde definice funkce \mathbf{V}^ε byla zavedena jednoduše změnou proměnné z x na y . Poznamenejme, že $\mathbf{V}^\varepsilon(y)$ zde znamená stejné posuvy jako ty označené pomocí $\mathbf{u}^\varepsilon(x)$, tj., řešení porušeného stavu, avšak ve smyslu zvětšených souřadnic y . Uvažme nyní asymptotický rozvoj pro \mathbf{u}^ε (který je rovněž znám jako „vnější rozvoj“) a pro \mathbf{V}^ε (který je znám jako „vnitřní rozvoj“) - [64]:

$$\text{kde} \quad \mathbf{u}^\varepsilon(x) = f_0(\varepsilon)\mathcal{U}_0(x) + f_1(\varepsilon)\mathcal{U}_1(x) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\varepsilon)r^{\bar{\delta}_i}\bar{\mathbf{u}}_i(\theta), \quad (64)$$

$$\mathbf{V}^\varepsilon(y) = F_0(\varepsilon)\mathcal{V}_0(y) + F_1(\varepsilon)\mathcal{V}_1(y) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(\varepsilon)\mathcal{V}_i(y)$$

$$f_0(\varepsilon) \neq 1, \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{i+1}(\varepsilon)}{f_i(\varepsilon)} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots; \quad F_0(\varepsilon) \neq 1, \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{i+1}(\varepsilon)}{F_i(\varepsilon)} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Bázové funkce $\{\mathcal{V}_i\}$ lze obdržet podobným způsobem. Funkce \mathcal{V}_0 je promítnuta na množinu bázových funkcí \mathcal{U}_i danou ve vztahu (64)₁, avšak nyní vyjádřenou pomocí zvětšených polárních souřadnic $y = (\rho, \theta)$: $\mathcal{U}_i(y) = \mathcal{U}_i(\rho, \theta) = \rho^{\bar{\delta}_i}\bar{\mathbf{u}}_i(\theta)$, and $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$. Rozvoj $\mathcal{V}_0(y)$ vypadá pomocí bázových funkcí následovně

$$\mathcal{V}_0(y) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i \rho^{\bar{\delta}_i} \bar{\mathbf{u}}_i(\theta) \quad (65)$$

Aby si prvních pár členů rozvoju $\mathbf{u}^\varepsilon(x)$ a $\mathbf{V}^\varepsilon(y)$ odpovídalo, stačí pouze rozvoj pro \mathcal{V}_0 . Užitím rovnic (64) a (65), obdržíme následující rovnost

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\varepsilon)r^{\bar{\delta}_i}\bar{\mathbf{u}}_i(\theta) = F_0(\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty} K_i \rho^{\bar{\delta}_i} \bar{\mathbf{u}}_i(\theta) + F_1(\varepsilon)\mathcal{V}_1(y) + \dots, \quad (66)$$

ze které lze provést porovnání členů se stejným faktorem $\bar{\mathbf{u}}_i$. Nejdříve si musí odpovídat členy s faktorem $\bar{\mathbf{u}}_0$ na obou stranách rovnice (66):

$$f_0(\varepsilon)r^{\bar{\delta}_0}\bar{\mathbf{u}}_0(\theta) = F_0(\varepsilon)K_0\rho^{\bar{\delta}_0}\bar{\mathbf{u}}_0(\theta). \quad (67)$$

Jelikož jsou v rovnici (67) zahrnuty tři faktory - f_0 , F_0 , a K_0 , je zde několik možností jak porovnání členů provést. Můžeme například zvolit f_0 jako (neznámou) konstantu H a $K_0 = 1$, nebo můžeme zvolit $f_0 = 1$ a K_0 jako (neznámou) konstantu. Pouze však první výběr dává smysl, protože je omezující natolik že stanoví koeficient f_0 v rovnici (64)₁. Vybereme tedy:

$$f_0(\varepsilon) = H, \quad K_0 = 1, \quad F_0(\varepsilon) = H\varepsilon^{\bar{\delta}_0} = H\varepsilon^{\delta_1}. \quad (68)$$

Dále členy s faktorem $\bar{\mathbf{u}}_1$ na obou stranách (66) by si měli odpovídat (s uvážením zanedbání členů vyšších řádů) tj:

$$f_1(\varepsilon)r^{\bar{\delta}_1}\bar{\mathbf{u}}_1(\theta) = F_0(\varepsilon)K_1\rho^{\bar{\delta}_1}\bar{\mathbf{u}}_1(\theta). \quad (69)$$

Vnější rozvoj (64) může být nyní zapsán jako:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\varepsilon)\mathcal{U}_i(x) = H[r^{\delta_1}\mathbf{u}_1(\theta)] + HK_1\varepsilon^{2\delta_1}[r^{-\delta_1}\mathbf{u}_{-1}(\theta)] + \dots \quad (70)$$

Změna potenciální energie δW mezi řešením v neporušeném $\mathbf{u}^0(x_1, x_2)$ a přírůstkem porušeném $\mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2)$ stavu, pro nezměněné okrajové podmínky je při užití Bettiho recipročního teorému následující:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)n_i u_j^0 - \sigma_{ij}(\mathbf{u}^0)n_i u_j^\varepsilon) ds = K_1 H^2 \varepsilon^{2\delta_1} + \dots = K_1 H^2 \left(\frac{l}{L}\right)^{2\delta_1} + \dots, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (71)$$

kde Γ je libovolná dráha obklopující kořen trhliny a n_i její normála směřující do počátku souřadnic. Asymptotický rozvoj na vnitřní oblasti aproximuje změnu potenciální energie δW pomocí K_1 závislé na porušení malým přírůstkem trhliny délky l přes funkce vnitřního rozvoje a tento faktor lze vypočítat pomocí MKP.

6.3.3 Určení H a K_1

Nejsou-li přítomny objemové síly, plyne z recipročního teorému, že následující integrál je křivkově nezávislý:

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_i v_j - \sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_i v_j] ds, \quad (72)$$

kde Γ je libovolná křivka obklopující kořen trhliny a \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou dvě různé přípustné pole posuvů. Uvážíme-li následující dvě pole posuvů $\mathbf{u} = \mathcal{U}_i(x) = r^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i(\theta)$, $\mathbf{v} = \mathcal{U}_j(x) = r^{\delta_j} \bar{\mathbf{u}}_j(\theta)$ lze potom dokázat, že křivkový integrál Ψ je roven nule pro $\delta_i \neq -\delta_j$ a je nenulový pro případ když $\delta_i = -\delta_j$.

Protože básová funkce odpovídající koeficientu $f_0 = H$ v asymptotickém rozvoji pro \mathbf{u}^ε je $r^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i(\theta)$, díky předchozí podmínce ortogonalitě musí platit:

$$\Psi(\mathbf{u}^\varepsilon, r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i}) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \Psi(r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i, r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i}) = f_0 \Psi(r^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i, r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i}). \quad (73)$$

Tudíž, zobecněný součinitel intensity napětí $H = f_0$ lze vypočítat následovně:

$$H = \frac{\Psi(\mathbf{u}^\varepsilon, r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i})}{\Psi(r^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i, r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i})}. \quad (74)$$

Na druhou stranu, jelikož přesné řešení \mathbf{u}^ε není známo, MKP řešení \mathbf{u}^h lze použít jako aproximaci pro \mathbf{u}^ε - viz např. Profant et.al. [64].

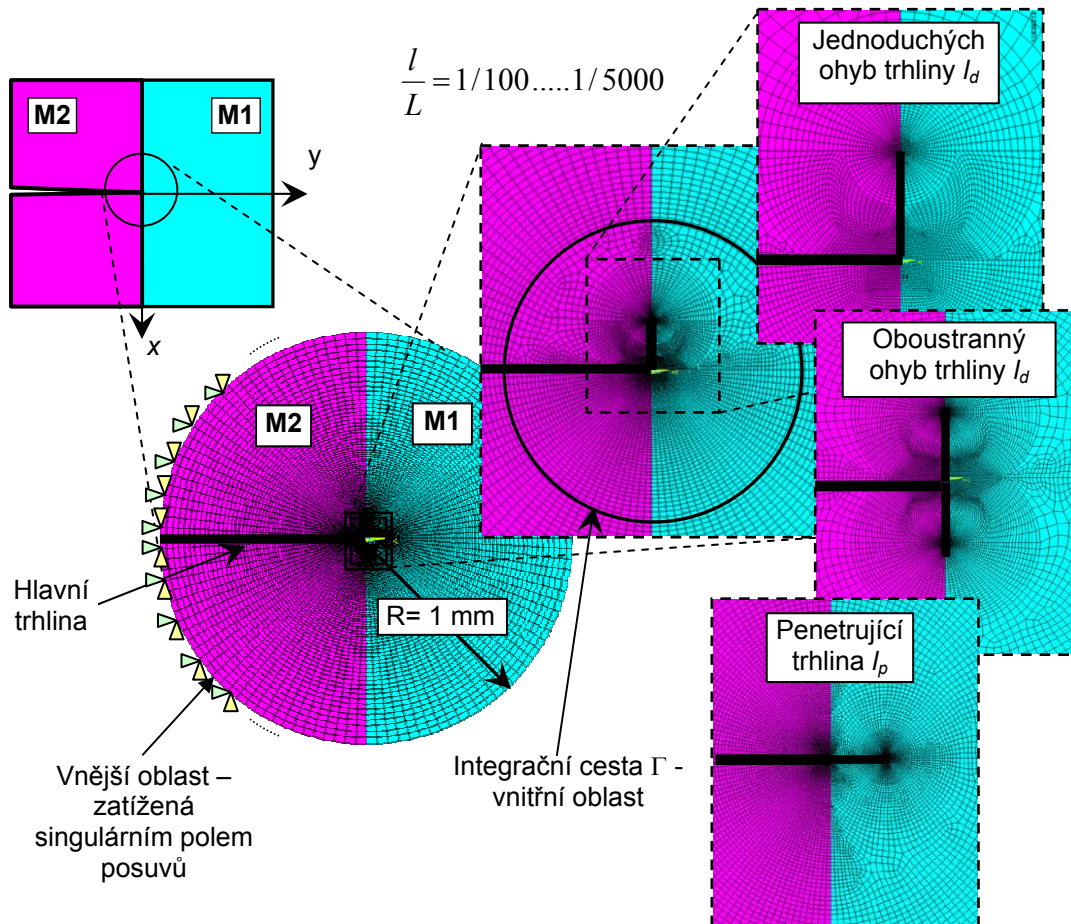
Zobecněný faktor intensity K_1 lze potom vypočítat podobně jako H . Je použit vnější rozvoj (65) ve vnitřním rozvoji (64) pro $\mathbf{V}^\varepsilon(\rho, \theta)$:

$$K_1 = \frac{\Psi(\mathcal{V}_0, \rho^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i)}{\Psi(r^{-\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_{-i}, r^{\delta_i} \bar{\mathbf{u}}_i)}. \quad (75)$$

Opět analogicky k aproximaci pro H , funkce \mathcal{V}_0 může být nahrazena MKP řešením \mathcal{V}_0^h abychom mohli K_1 vypočítat. Dosazením (74) a (75) do (71), lze změnu potenciální energie δW vypočítat.

6.3.4 Numerické výsledky

Výpočet změny potenciální energie δW – výrazy (61), (75), způsobené konečným přírůstkem trhliny vyžaduje numerické řešení napěťového a deformačního pole na vnitřní oblasti pomocí MKP. Pro tento účel je použit MKP systém ANSYS 10.0. V následujícím obrázku je demonstrace konečnoprvkové sítě použité pro jednotlivé případy šíření trhliny. Pro použití vstupních souborů k výpočtu- viz metodický list č. 4.



Obr. 19 Ukázka použité FE sítě pro případ jednoduše a oboustranně ohnuté trhliny a případu penetrující trhliny

Model je zhotoven ze dvou materiálových vrstev M1 a M2, kde elastické vlastnosti obou materiálů jsou identické: $E_L = 137$ GPa, $E_T = E_Z = 10,8$ GPa $G_{ZT} = 3,36$ GPa $\nu_{TZ} = 0,49$ $G_{ZL} = G_{TL} = 5,65$ GPa $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,238$ – pouze hlavní materiálové směry jsou vzájemně u těchto materiálů potočeny o 90° . Prakticky to znamená, že materiál M1 má Youngův modul E_L ve směru osy y a materiál M2 má E_L ve směru osy x .

Vnější oblast (viz Obr. 18 nebo Obr. 19) je zatížena singulárním polem posuvů na poloměru $r=L$:

$$\underline{U}(x_1, x_2) = H r^\delta u(\theta) + \dots, \quad (76)$$

kde charakteristické vlastní číslo δ a funkce $u(\theta)$ jsou převzaty ze singulární analýzy založené na teorii komplexních potenciálů (viz výše) a zobecněný součinitel intensity napětí H je pro příslušné zatěžovací podmínky vypočítán pomocí kombinace dvoustavového ψ -integrálu a MKP – viz kapitola 6.1.2.

Přírůstky trhliny délek l_d , l_p se použijí pro případ ohybu trhliny (jak jednoduchého tak oboustranného) a pro případ penetrace. Každý z těchto případů se počítá zvlášť. Při zatěžovacích podmínkách (76) na vnější oblasti, se napětí a posuvy na vnitřní oblasti vypočítají pomocí MKP systému ANSYS. Tyto výsledky jsou následně použity pro výpočet K_I a změny potenciální energie způsobené malým přírůstkem trhliny ve zvoleném směru – viz Tabulka 1 (za zmínku a povšimnutí stojí nezávislost K_I na velikosti přírůstku). Jakmile se vypočítá změna potenciální energie (pro všechny případy šíření trhliny) užitím vztahu (71), potom lze vypočítat i doplňkovou energii pro příslušné stavy (61). Trhlina se potom bude šířit tím směrem, který maximalizuje právě tuto doplňkovou energii ΔW .

Tabulka 1: Hodnoty K_I a změny potenciální energie v závislosti na velikosti přírůstku trhliny a typu šíření (pro $H=1 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\delta_1}$)

ε		1/100	1/500	1/1000	1/4000
Single deflection:	$K_I =$	0.005205	0.005260	0.005271	0.005289
	$\delta W_d =$	0.0002531	0.0000888	0.0000565	0.0000228
Double deflection:	$K_I =$	0.005007	0.0050575	0.0050686	0.0050750
	$\delta W_d =$	0.0002434	0.0000855	0.0000543	0.0000249
Penetration:	$K_I =$	0.011012	0.011279	0.011332	0.011386
	$\delta W_p =$	0.0005353	0.0001906	0.0001214	0.0000494

Je vhodné poznamenat, že výpočet doplňkové energie pro případ penetrace nebo ohybu trhliny, je třeba znát hodnotu příslušné houževnatosti G^c_i nebo G^c_l ve výrazu (61), (nejlépe získat experimentálně na vhodném vzorku). Na základě těchto dat, lze potom soudit o směru dalšího šíření trhliny.

7 Experiment

Experimentální ověření výpočtového modelování bude provedeno na bimateriálovém laminátu $\text{Al}_2\text{O}_3 / \text{ZrO}_2$. Tento materiál byl jediným dostupným kandidátem na verifikaci modelování.

Výchozí prášky pro výrobu bimateriálového laminátu:

Al_2O_3 - RC-HP-DBM (Malakoff, Ind., USA)

ZrO_2 - TZ-3Y (Tosoh, Japonsko)

Příprava laminátu:

Elektroforetická depozice z isopropanolové suspenze stabilizované kyselinou monochloroctovou, slinování $1500^\circ\text{C}/2\text{h}$ ve vzdušné atmosféře – viz [17], [18], [45].

vrstva ZrO_2 :

střední vel. zrna $0,55\mu\text{m}$

tvrdost HV 12,9 GPa

lomová houževnatost $9,6 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$

relativní hustota 99,9% teoretické hustoty

elastické konstanty: $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,31$

Vrstva Al_2O_3 :

střední vel. zrna $1,93\mu\text{m}$

tvrdost HV 17,8 GPa

lomová houževnatost $5,2 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$

relativní hustota 99,2% teoretické hustoty

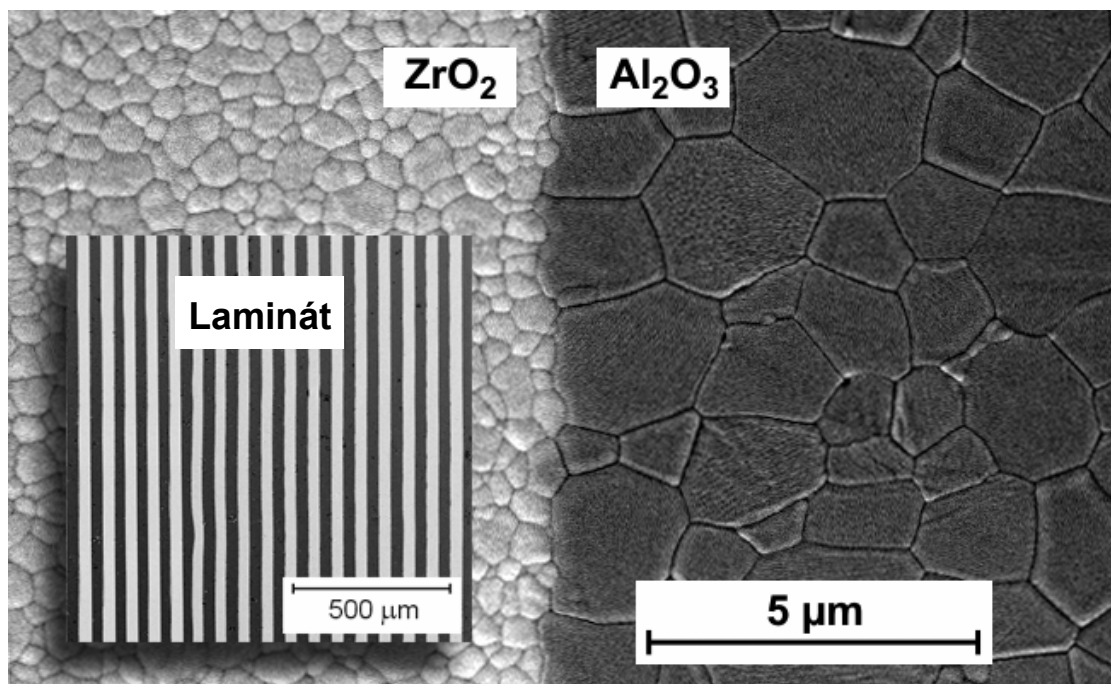
elastické konstanty: $E = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0,26$

Laminát:

počet vrstev: střídavě 30 vrstev Al_2O_3 a 29 vrstev ZrO_2 , celkem 59 vrstev

tloušťka vrstev $43\mu\text{m}$

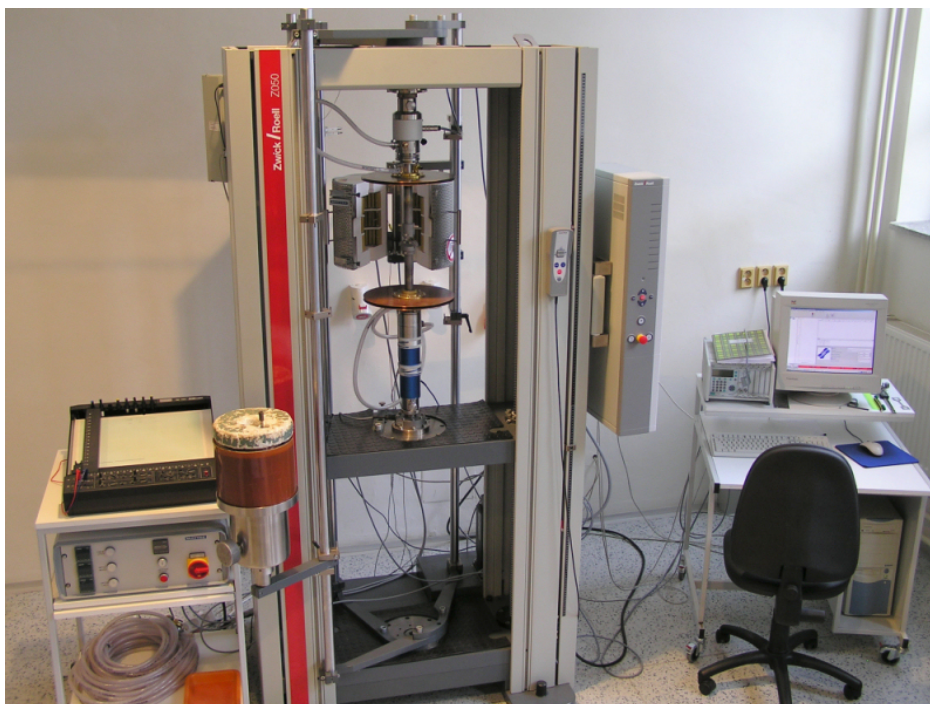
relativní hustota kompozitu 99,78% teoretické hustoty



Obr. 20 Detail rozhraní bi-materiálového laminátu $\text{ZrO}_2 / \text{Al}_2\text{O}_3$

Zkušební stroje na kterých se bude materiál zkoušet:

- ZWICK (Obr. 21): Mechanický zkušební stroj ZWICK Z50, zatížení do ± 50 kN, teplota zkoušky -196 až $+1200$ °C, přípravky pro tahové a tlakové zkoušky a zkoušky ve 3 nebo 4 - bodovém ohybu.
- INSTRON (Obr. 22): Elektromechanický zkušební stroj INSTRON 8862, zatížení do ± 100 kN, přípravky pro tahové a tlakové zkoušky a zkoušky ve 3 nebo 4 - bodovém ohybu.



Obr. 21 Mechanický zkušební stroj ZWICK Z50



Obr. 22 Elektromechanický zkušební stroj INSTRON 8862

Oba zkušební stroje jsou vybavením Ústavu fyziky materiálu AVČR Brno, kde se rovněž také experiment bude provádět. Z časové náročnosti způsobené zdlouhavou přípravou vzorků bude však experiment proveden až v prvním pololetí roku 2008. Vyhrazené finanční prostředky v rámci tohoto projektu – 15000,- Kč. byly použity jako příspěvek na jejich výrobu (celková potřebná částka je totiž mnohem vyšší a je kryta z dalších zdrojů). O výsledky experimentu bude následně obohacena i samotná výuka. Pro provedení experimentu bude z vytvořeného bimateriálového laminátu vyříznut a vybroušen vzorek typických rozměrů pro tříbodový nebo čtyřbodový ohyb a v jedné z vrstev bude iniciována trhlinka kolmá a končící na rozhraní s další vrstvou. Poté bude provedena zkouška tříbodovým ohybem a bude se zjišťovat, při jaké zatěžovací síle dojde k šíření trhliny a jakým směrem.

8 Závěrečné zhodnocení projektu

Tato práce se zabývá výpočtovým modelováním problémů lomové mechaniky heterogenních materiálů (nalezení charakteristik obecného koncentrátoru napětí, zahrnutím vlivu přemostění a definicí lomových kritérií pro daný obecný koncentrátor napětí). Pro dané výpočty je nutná alespoň základní znalost matematických výpočetních programů MAPLE a MATLAB a MKP systému ANSYS, které jsou všechny v rámci fakulty strojního inženýrství a Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky studentům k dispozici.

V teoretické části této zprávy je uvedena rešeršní studie z oblasti řešení problematiky s důrazem kladeným na demonstraci různých metod a přístupů pro řešení daného problému. Z těchto metod byly potom vybrány nejvhodnější pro splnění definovaných cílů. Předpokládá se, že se tato teoretická část stane základem pro zpracování budoucích semestrálních a diplomových projektů a budou tvořit základ znalostní databáze pro posluchače, zaměřené do oblasti počítačového modelování porušování progresivních materiálů. Zejména se jedná o obor M3905-Aplikovaná mechanika a obor doktorského studia D2312 Inženýrská mechanika se zaměřením na lomovou mechaniku.

Výsledky byly prezentovány na několika konferencích (tuzemské i zahraniční), kde výstupem byly příspěvky ve sbornících a v případě zahraniční konference bude příspěvek publikován ve speciálním čísle významného časopisu International Journal of Fracture, kam byl již po recenzi přijat.

Získané poznatky dále mohou být v příštím roce zařazeny do osnov předmětu Vybrané matematické metody v mechanice, který je součástí akreditovaného magisterského studijního oboru M3905-Aplikovaná mechanika. Dále se předpokládá, že získané výsledky budou využity při tvorbě nového předmětu Výpočetní metody v mechanice kompozitů - rovněž pro výše uvedené obory. Může zde být využito zhotovených studijních podkladů a komentovaných metodických listů pro úlohy do cvičení. Tyto listy mohou sloužit jako návod pro řešení i jiných typů úloh zadaných vyučujícím. Vstupní soubory do všech programů jsou připraveny způsobem, jenž umožňuje snadnou modifikaci použitého, obecně anisotropního materiálu a změnu případné konfigurace trhliny a materiálového rozhraní. Použití těchto souborů je v metodických listech detailně popsáno a vše je studentům volně přístupné na webových stránkách Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně.

Plánované experimentální ověření matematického modelování, nebylo možné z důvodu nedostupnosti potřebných vzorků v roce 2007 provést, nicméně vyhrazené finanční prostředky budou na daný účel použity (vzorky již byli zálohově Akademii Věd ČR v Brně zaplacený). Experiment bude pouze proveden až v roce 2008 (podrobnější zdůvodnění viz kapitola 1.2), kde potom získané výsledky budou do výuky dodatečně doplněny.

Publikace související s řešením grantového projektu

- [I] ŠEVEČEK, O., VYSLOUŽIL, T., PROFANT, T. & KOTOUL, M., A solution of the bridging problem of a crack in the thin orthotropic layer with tip on the interface of an orthotropic substrate, *In proc. of Applied Mechanics 2007*, ISBN 978-80-248-1389-9 Malenovice, 2007, pp.207-208
- [II] ŠEVEČEK, O., PROFANT, T. & KOTOUL, M., Crack propagation criteria for the crack terminating on the interface of a thin orthotropic layer and an orthotropic substrate, *In proc. of Eng. Mechanics 2007*, ISBN 978-80-87012-06-2, Svratka, 2007, pp. 350-351
- [III] KOTOUL, M., PROFANT, T. & ŠEVEČEK, O., Dislocation tri-material solution in the analysis of bridged crack in anisotropic bimaterial half-space, *Accepted in International Journal of Fracture*, 2007.
- [IV] ŠEVEČEK, O., PROFANT, T. & KOTOUL, M., Problems of the crack propagation across the interface of two orthotropic media, *In proc. of Multilevel Design of Advanced Materials 2007*, ISBN 978-80-254-0793-6, IPM ASCR, Ostrava, 2007, pp. 53-60

Literatura

- [1] ANDERSON, T. L., Fracture Mechanics: fundamentals and applications, *CRC Press LLC*, 1995, Florida
- [2] ANSYS Release 10.0, User's Manual, *Swanson Analysis Sys. Inc.*, Pennsylvania, 2005
- [3] AVESTON, J., COOPER, G.A. & KELLY, A., The properties of fibre composites , *In proc. of National Physical Laboratory*, Guilford, IPC Science and Technology Press, Teddington, U.K., 1971, pp.15-26
- [4] BABUSKA, I. & MILLER, A., The post-processing approach in the FEM, Part 2: The calculation of stress intensity factors, *Int. Num. Meth. Engng*, Vol. 20, 1984, pp. 1111-1129
- [5] BARROSO, A., MANTIČ, V. & PARIS, F., Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners, *International Journal of Fracture*, Vol. 119, 2003, pp. 1-23
- [6] BROBERG, K. B., A note on T-stress determination using dislocation arrays, *Int. Journal of Fracture*, Vol.131, 2005, pp. 1-14
- [7] BUDIANSKY, B. & AMAZIGO, J. C., Toughening by aligned, frictionally constrained fibres, *J.Mech. Phys. Solids*, Vol. 37, 1989, pp.93-109
- [8] BUDIANSKY, B. & HUTCHINSON, J. W., Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J.Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, 1986, pp.167-189
- [9] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J. W. & EVANS A.G., Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, 1986, pp. 167-189
- [10] COOK, T. S. & ERDOGAN, F., Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. of Eng. Science*, Vol. 10, 1972, pp. 677-697
- [11] DEMPSEY, J. P. & SINCLAIR, G. B., On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge, *J. Elasticity*, Vol.11, 1981, pp. 317-327
- [12] DESMORAT, R. & LECKIE, F. A., Singularities in bi-materials: parametric study of an isotropic/anisotropic joint. *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 17, 1998, pp. 33-52
- [13] ESHELBY, J. D., READ, W. T. & SHOCKLEY, W., Anisotropic Elasticity with Application to Dislocation Theory, *Acta Metallurgica*, Vol. 1, 1953, pp. 251-259
- [14] FETT, T., MUNZ, D. T., GERAGHTY, R.D. & WHITE, K.W., Bridging stress determination by evaluation of the R-curve, *Journal of European ceramic society*, Vol. 20, 2000, pp. 2143-2148
- [15] GROSS, D. & SEELIG, T., Fracture Mechanics – With Introduction to Micromechanics, *Springer*, 2006, Berlin
- [16] GRÖGER, R., Characterization of fracture-mechanical behavior of bimaterial V-notches using BEM, *Dissertation*, FME BUT a IPM AVCR Brno, 2003, Brno
- [17] HADRABA H., KLIMES J., MACA K., Crack propagation in layered Al₂O₃/ZrO₂ composites prepared by electrophoretic deposition, *J. of materials science*, Vol. 42, 2007, pp. 6404-6411.
- [18] HADRABA H., MACA K., CIHLAR J., Electrophoretic deposition of alumina and zirconia - II. Two-component systems, *Ceramics international*, Vol. 30, 2004, pp. 853-863.

- [19] HILLS, D. A. & KELLY, D. N., Solution of Crack Problems – The distributed dislocation technique, *Kluwer Academic publisher*, 1996, Dordrecht
- [20] HE, M. J., EVANS, A. G. & HUTCHINSON, J. W., Crack deflection between dissimilar elastic materials: role of residual stresses, *Int. J. Solids structures*, Vol.31, 1994, pp. 3443-3455
- [21] HE, M. J. & HUTCHINSON, J. W., Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.25, 1989, pp.1053-1067
- [22] HUTCHINSON, J. W., Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials: Role of residual stresses, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.31, 1994, pp.3443-3455
- [23] CHANG, J. H. & WU, D. J., Calculation of mixed-mode stress intensity factors for a crack normal to a bimaterial interface using contour integrals, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.70, 2003, pp.1675-1695
- [24] CHEN, D. H., A crack normal to and terminating at a bimaterial interface, *Engineering Fracture mechanics*, Vol.49, 1994, pp.517-532
- [25] CHEN, F. H. K. & SHIELD, R. T., Conservation laws in elasticity of the J-integral type, *Z. Angw. Math. Phys. (ZAMP)*, Vol.28, 1977, pp.1-22
- [26] CHEN, S. H., WANG, T. C. & SHARON, K., A crack perpendicular to the bimat. interface in finite solid, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 40, 2003, pp.2731-2755
- [27] CHEN, Y. Z., Closed form solutions of T-stress in plane elasticity crack problems, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.37, 2000, pp.1629-1637
- [28] CHOI, S. T. & EARMME, Y. Y., Elastic study on singularities interacting with interfaces using alternating technique Part I: Anisotropic trimaterial, *Int. J. Solid Structures*, Vol.39, 2002, pp.943-957
- [29] CHOW, W. T. & ATLURI, S. N., Stress intensity factors as the fract. parameters for delamination crack growth in composite laminates. *Composites B*, 1997, pp. 375-384
- [30] IM, S. & KIM, K. S., An application of two-state M-integral for computing the intensity of the singular near-tip field for a generic wedge, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.48, 2000, pp.129-151
- [31] KFOURI, A. P., Some evaluations of elastic T-term using Eshelby's method, *Int. J. of Fracture*, Vol.30, 1986, pp.301-315
- [32] KIM, J. & PAULINO, G. H., T-stress, mixed modes SIFs and cracks initiation angles in FGM, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.192, 2003, pp.1463-1494
- [33] KOTOUL, M., ŠEVEČEK, O. & PROFANT, T., Calculation of K-Factor and T-Stress for Crack in Anisotropic bimaterials, *In proc. of 16th Europ. Conf. of Fracture Failure Analysis of Nano and E. Mat. & Structures*, Alexandroupolis, Greece, 2006
- [34] KOTOUL, M., VYSLOUŽIL, T. & DLOUHÝ, I., Modelling the R-curve behaviour in chevron-notched specimen using weight functions, *In Advances in Fracture and Damage Mechanics IV*, Eastleigh, U.K., 2005, pp.217-225
- [35] KREJČÍŘ, M., Výpočet vlastních hodnot asymptotického rozvoje napětí v okolí multimateriálového vrubu, *Diploma work*, FME BUTR Brno, 2002, Brno
- [36] LACROIX, C., LEGUILLON, D. & MARTIN, E., The Influence of an interphase on the deflection of a matrix crack in composite, *Comp. sc. a. tech.*, Vol. 62, 2002, pp. 519-523

- [37] LEGUILLON, D., Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch, *Europ. Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 21, 2002, pp. 61-72
- [38] LEGUILLON, D. & SANCHEZ-PALENCIA, E., Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity, *Masson*, 1987, Paris
- [39] LEGUILLON, D., LACROIX, C. & MARTIN, E., Interface debonding ahead of a primary crack, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, 2000, pp. 2137-2161
- [40] LEKHNITSKII, S. G., Teória uprugosti anisotrop. těla, *Gostěchizdat*, 1950, Moskva
- [41] LEKHNITSKII, S. G., Někotoryje osnovnyje zadači matěmatičeskoj teóriji uprugosti, *Gostěchizdat*, 1953, Moskva
- [42] LEKHNITSKII, S. G., Anizotropnyje plastinki, *Gostěchizdat*, 1957, Moskva
- [43] LEKHNITSKII, S. G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, *Holden-Day*, 1963, San Francisco
- [44] LIN, Y. Y. & SUNG, J. C., Singularities of an inclined crack terminating at an anisotropic bimaterial interface, *Int. J. Solid Structures*, Vol.34, 1997, pp. 3727-3754
- [45] MACA K., HADRABA H., CIHLAR J., Electrophoretic deposition of alumina and zirconia - I. Single-component systems, *Ceramics international*, Vol. 30, 2004, pp. 843-852.
- [46] MAMMOLI, A. A., GRAHAM, A. L., REIMANIS, I. E., & TULLOCK, D. L., The effect of flaws on the propagation of cracks at bi-material interfaces, *Acta Metall. mater.*, Vol.43, 1995, pp. 1149-1156
- [47] MARSHALL, D.B. & COX, B. N., A J-integral method for calculating steady-state matrix cracking stresses in composites, *Mechanics of materials*, Vol.7, 1988, pp.127-133
- [48] MARTIN, E., PETERS, P.W.M., LEGUILLON, D. & QUENISSET, J.M., Conditions for matrix crack deflection at an interface in ceramic matrix composites, *Material science and engineering*, Vol. A250, 1998, pp.291-302
- [49] MARTIN, E., LEGUILLON, D. & LACROIX, C., A revisited criterion for crack deflection at an interface in a brittle bimaterial, *Composites Science and Technology*, Vol. 61, 2001, pp.1671-1679
- [50] MARTINEZ, D. & GUPTA, V., Energy criterion for crack deflection at an interface between two orthotropic media, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, 1994, pp.1247-1271
- [51] MATLAB Release 14 User's Manual, *The MathWorks, Inc.*, 2005, Massachusetts
- [52] MELIN, S., The influence of T-stress on the directional stability of cracks, *Int. Journal of Fracture*, Vol.114, 2002, pp. 259-265
- [53] MODI, M.B. & SITARAMAN, S.K., Interfacial fracture toughness measurement for thin film interfaces, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 71, 2004, pp.1219-1234
- [54] MUNZ, D. & FETT, T., Ceramics – Mechanical Properties, Failure Behaviour, Materials Selection, *Springer*, 1999, Berlin
- [55] MUSCHELIŠVILI, N. I., Někotoryje osnovnyje zadači matěmatičeskoj teóriji uprugosti, *Gostěchizdat*, 1953, Moskva
- [56] NÁHLÍK, L., Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů, Dissertation (in Czech), FME BUT a IPM ASCR Brno, 2002, Brno

- [57] NAIR, S.V., EATON, H.E. & SUN, E.Y., Measurement of interface strength and toughness in shear of environmental barrier coatings on ceramic substrate at ambient and elevated temp., *Science and coating technology*, Vol. 200, 2006, pp.5175-5180
- [58] O'DOWD, N. P. & SHIH, C. F., Test geometries for measuring interfacial fracture toughness, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 78, 1992 pp. 571-589
- [59] PAPADAKIS, P. J. & BABUŠKA, I., A numerical procedure for the determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity, *Computer methods in applied mech. & eng.*, Vol. 122, 1995 pp. 69-92
- [60] PROFANT, T., KOTOUL, M. & ŠEVEČEK, O., Analysis of edge bridged crack in anisotropic bimaterial half-space, *Key Eng.Mat.*, Vol. 324-325, pp.1143-1148, 2006
- [61] PROFANT, T., KOTOUL, M. & ŠEVEČEK, O., Stress field analysis near the semi-infinite crack tip terminating perpendicular to the interface between two orthotropic materials, *In proc. of Engineering Mechanics 2006*, Svratka, 2006, pp. 304-305
- [62] PROFANT, T., ŠEVEČEK, O. & KOTOUL, M., Singularita napětí polonekonečné trhliny kolmé k rozhraní dvou ortotropních materiálů, *In proc. of Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2006*, Ústí n. Labem, 2006, pp. 175-182
- [63] PROFANT, T., ŠEVEČEK, O. & KOTOUL, M., Analýza singularity napětí u trhlin na rozhraní dvou ortotropních materiálů, *In Proc. of Computational Mechanics 2006*, Nečtiny, 2006, pp. 483-490
- [64] PROFANT, T., ŠEVEČEK, O. & KOTOUL, M., Calculation of K-factor and T-stress for cracks in anisotropic bimaterials, *Accepted in: Engineering Fracture. Mech.*, 2007
- [65] QIAN, Z. Q., On the evaluation of wedge corner stress intensity factors of bi-material joints with surface tractions, *Computers and Structures*, Vol. 79, 2001, pp. 53 – 64.
- [66] SARRAFI-NOUR, G. R., COYLE., T. W. & FETT, T., A weight function for the crack surface tractions in chevron-notched specimens, *Engineering fracture mechanics*, Vol.59, 1998, pp. 439-445
- [67] SEITL, S., Dvoupárametrová lomová mechanika: chování krátkých únavových trhlin, *Disertační práce*, FME BUT a IPM ASCR Brno, 2003, Brno
- [68] SHIH, C. F. & ASARO, R. J., Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I – Small Scale Y., *ASME J.Appl. Mech.*, Vol. 55, 1988, pp. 299-316.
- [69] SILLS, L.B., HERSHKOVITZ I. & WAWRZYNEK, P.A., Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I , *Engineering fracture mechanics*, Vol. 72, 2005, pp. 2328 – 2358.
- [70] SLADEK, J, SLADEK, V. & FEDELINSKI, P., Computation of the second fracture parameter in elastodynamics by the boundary element method, *Advances in Engineering Software*, Vol. 30, 1999, pp. 725 – 734.
- [71] SODEN, P. D., HINTON, M. J. & KADDOUR, A. S., Lamina properties, Lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates, *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1998, pp. 1011-1022
- [72] STERN, M. & SONI, M. L., On the computation of stress intensities at fixed-free corners, *Int. J. Solid Structures*, Vol. 12, 1976, pp. 331-337
- [73] STROH, A. N., Dislocation and Cracks in Anisotropic Elasticity, *Phil. Mag.*, Vol. 7, 1958, pp. 625-646

- [74] SUO, Z., Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. of Royal Society of London*, Vol. A 427, 1990, pp. 331-358
- [75] SUO, Z., Singularities interacting with interface and cracks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, 1989, pp. 1133-1142
- [76] SUTRADHAR, A. & PAULINO, G. H., Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed mode cracks by the interaction integral method, *Engng. Anal. with Boundary Elems.*, Vol. 28, 2004, pp. 1335-1350
- [77] ŠEVEČEK, O., VYSLOUŽIL, T., PROFANT, T. & KOTOUL, M., A solution of the bridging problem of a crack in the thin orthotr.layer with tip on the interface of an orthotr. substrate, *In proc. of Applied Mechanics 2007*, Malenovice, 2007, pp.207-208
- [78] TAN, M. A. & MEGUID, S. A., Analysis of bimaterial wedges using a new singular finite element, *International Journal of Fracture*, Vol.88, 1997, pp. 373-391
- [79] THOULESS, M.D. & EVANS, A.G., Effects of pull-out on the mechanical properties of ceramic matrix composites, *In Acta Metall*, 1988, pp.517-522
- [80] TING, T. C. T., Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, *Oxford University Press*, 1996
- [81] TING, T. C. T. & HOANG, P. H., Singularities at the tip of a crack normal to the interface of an anisotropic layered composite, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, 1984, pp. 439-454
- [82] TULLOCK, D. L., REIMANIS, I. E., GRAHAM, A. L. & PETROVIC, J.J., Deflection and penetration of cracks at an interface between two dissimilar materials, *Acta Metall. mater.*, Vol.42, 1994, pp. 3245-3252
- [83] VLK, M., Mezní stavy a spolehlivost, *Skriptum VUT v Brně*, 1.vydání, 1991
- [84] VOLINSKY, A.A., MOODY, N.R. & GERBERICH, W.W., Interfacial toughness measurements for thin films on substrate, *Acta Material.*, Vol. 50, 2002, pp.441-466
- [85] VU-QUOC, L. & TRAN, V. X., Singularity analysis and fracture energy-release rate for composites: Piecewise homogenous-anisotropic materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, 2006, pp.5162-5197
- [86] WANG, H. F., GERBERICH, W. W. & SKOWRONEK, C. J., Fracture mechanics of Ti/Al₂O₃ interfaces, *Acta Metall*, Vol.41, 1993, pp. 2425-2432
- [87] WANG, T. C. & STAHL, P., Stress state in front of a crack perpendicular to bimaterial interface, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.59, 1998, pp. 471-485
- [88] YANG, S., & YUAN, F. G., Determination and representation of the stress coefficient terms by path independent integrals in anisotropic cracked solids, *Int. Journal of Fracture*, Vol.101, 2000, pp. 291-319
- [89] YAU, J. F., WANG, S. S. & CORTEN, H. T., A mixed mode crack analysis of isotr. solids using conservation laws of elasticity, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.47, 1980, pp. 335-341
- [90] YING, X. & KATZ, N. I., A uniform formulation for the calculation of stress singularities in the plane elasticity of a wedge composed of multiple isotropic materials, *Comput. Math. Applic.*, Vol.14, 1987, pp. 437-458
- [91] ZOU, L., HUANG, Y. & CHEN, R., The measurement and characterization of the interfacial toughness of composites by a three-point bending test, *Journal of the European Ceramic Society*, Vol. 23, 2003, pp.1987-1996